Fisica

Appunti di Fisica 5

Michele prof. Perini

IISS Copernico Pasoli - Liceo Scientifico

A.S. 2025-2026

1. Induzione magnetica
   - Legge di Faraday-Neumann-Lenz
   - Induttanza
   - Circuiti RL
   - Energia del campo B
   - Densità di energia
   - Trasformatori
2. Leggi di Maxwell
   - Prima legge di Maxwell
   - Seconda legge di Maxwell
   - Terza legge di Maxwell
   - Quarta legge di Maxwell
   - Leggi dell'elettromagnetismo
   - Leggi di Maxwell in assenza di cariche
   - Onde elettromagnetiche
3. Cinematica relativistica
   - Assiomi relatività ristretta
   - Orologio luce

- Intervallo spazio-tempo
- Galileo vs Einstein
- Diagrammi spazio-tempo
- Dilatazione dei tempi
- Contrazione delle lunghezze
- Trasformazioni di Lorentz
- Velocità relative
- Effetto Doppler
- Esempi
  - Muoni
  - Paradosso dei gemelli
  - Composizione delle velocità con metodo del fattore di rapidità
  - Effetto Doppler

4. Dinamica relativistica
   - Enermoto
   - Modulo enermoto
   - Energia
   - Energia cinetica classica e relativistica

- Energia e quantità di moto
- Esempi
  - Quantità di moto dei fotoni
  - Urto tra particelle identiche
- Massa relativistica

5. Atomi e Quanti
   - Thomson
   - Millikan
   - Corpo nero
   - Quantità di moto dei fotoni
   - Effetto fotoelettrico
   - Effetto Compton
   - Particelle e onde
   - Cenni di Meccanica Quantistica

6. Fisica e matematica
   - Derivate
     - Cinematica
     - MRUA
     - Moto circolare uniforme

- Alternatore
- Equazioni differenziali
  - Omogenee del primo ordine
  - Non omogenee del primo ordine
  - Del secondo ordine
  - Oscillatore armonico
  - Pendolo
  - Circuiti RC
  - Circuiti RL
  - Circuiti LC
- Integrali
  - Potenza in circuiti a tensione alternata
  - Lavoro in trasformazioni isoterme
  - Legge di Stefan-Boltzmann dalla curva di Wien
- Cenni ai sistemi caotici

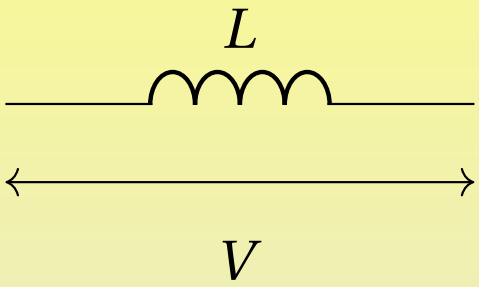
$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Sperimentalmente si verifica che una variazione di flusso di campo magnetico attraverso una spira provoca l'induzione di una corrente (con conseguente differenza di potenziale associata) nella spira che è tanto maggiore quanto più rapidamente varia il flusso di B. La corrente indotta tende ad opporsi alla variazione di flusso del campo magnetico.

Nel caso di un solenoide con N spire di sezione S e lunghezza l si ha:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(NBS)}{dt} = -NS\frac{dB}{dt} = -NS\frac{d\left(\mu I\frac{N}{l}\right)}{dt} =$$

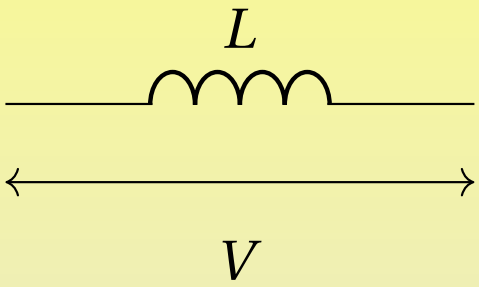
$$= -\mu\frac{N^2}{l}S\frac{dI}{dt} \rightarrow L = \mu\frac{N^2}{l}S$$



Nel caso di un solenoide con N spire di sezione S e lunghezza l si ha:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(NBS)}{dt} = -NS\frac{dB}{dt} = -NS\frac{d\left(\mu I\frac{N}{l}\right)}{dt} =$$

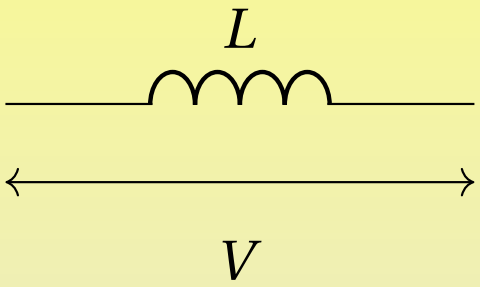
$$= -\mu\frac{N^2}{l}S\frac{dI}{dt} \rightarrow L = \mu\frac{N^2}{l}S$$



Nel caso di un solenoide con N spire di sezione S e lunghezza l si ha:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(NBS)}{dt} = -NS\frac{dB}{dt} = -NS\frac{d\left(\mu I\frac{N}{l}\right)}{dt} =$$

$$= -\mu\frac{N^2}{l}S\frac{dI}{dt} \rightarrow L = \mu\frac{N^2}{l}S$$



Definizione di induttanza:

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

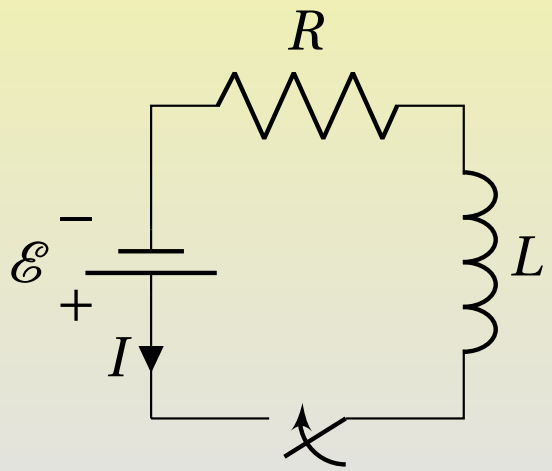
Nel caso di un solenoide con N spire di sezione S e lunghezza l si ha:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(NBS)}{dt} = -NS\frac{dB}{dt} = -NS\frac{d\left(\mu I\frac{N}{l}\right)}{dt} =$$

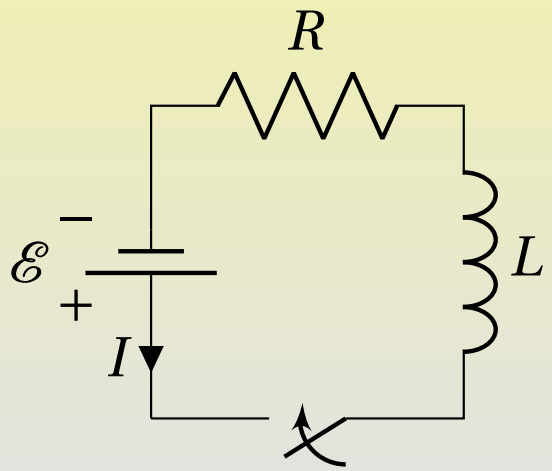
$$= -\mu\frac{N^2}{l}S\frac{dI}{dt} \rightarrow L = \mu\frac{N^2}{l}S$$

Circuito RL, con $I(0) = 0$

Circuito RL, con $I(0) = 0$



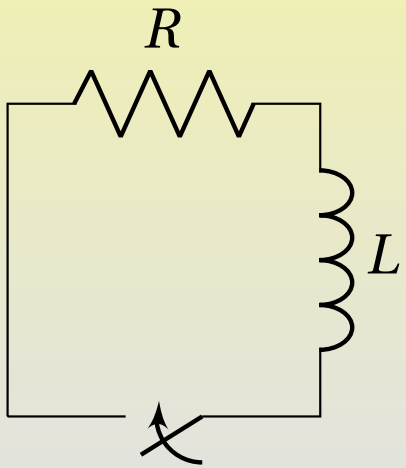
Circuito RL, con $I(0) = 0$



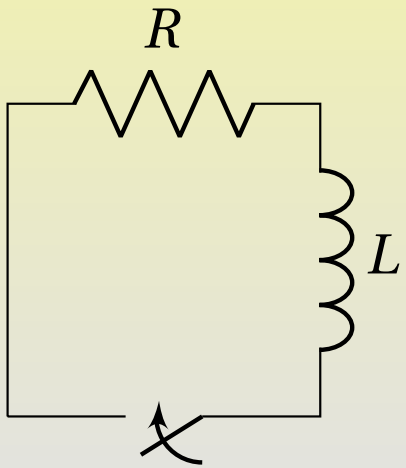
$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$$

Circuito RL, con $I(0)$

Circuito RL, con $I(0)$

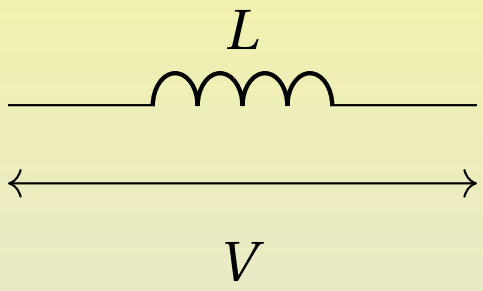


Circuito RL, con $I(0)$



$$I(t) = I(0)e^{-\frac{tR}{L}}$$

Energia immagazzinata in un solenoide



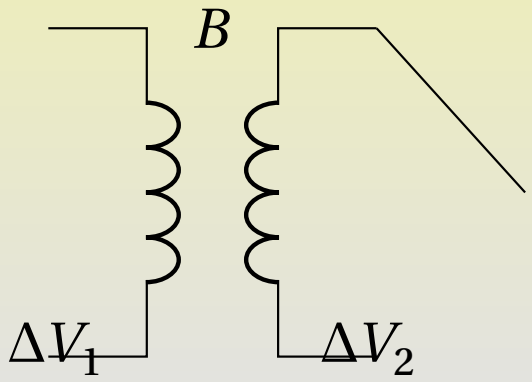
$$U = \int_0^I V\,dq = \int_0^I L\frac{dI}{dt}dq = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2$$

Densità di energia in un solenoide ideale di sezione S e lunghezza l, con $B = \mu \frac{N}{l} I$

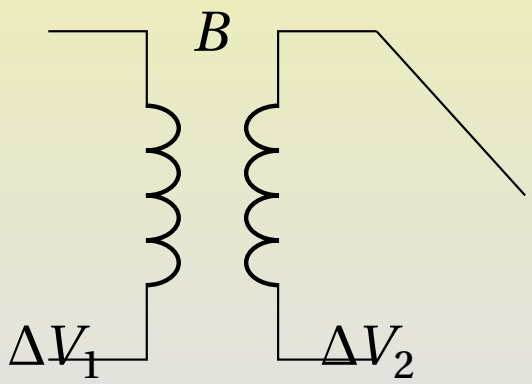
$$u = \frac{U}{Sl} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{Sl} = \frac{\frac{1}{2} \mu \frac{N^2}{l} S \left(\frac{Bl}{N\mu} \right)^2}{Sl} = \frac{1}{2\mu} B^2$$

L'espressione $u = \frac{1}{2\mu} B^2$ è valida in generale.

I due solenoidi che costituiscono il trasformatore hanno entrambi le spire di sezione S e hanno in comune lo stesso campo magnetico B



I due solenoidi che costituiscono il trasformatore hanno entrambi le spire di sezione S e hanno in comune lo stesso campo magnetico B



$$B_1 = B_2 = B$$

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{dB_2}{dt}$$

$$-N_2 S N_1 \frac{dB_1}{dt} = -N_1 S N_2 \frac{dB_2}{dt}$$

$$N_2 \Delta V_1 = N_1 \Delta V_2$$

$$\frac{\Delta V_1}{N_1} = \frac{\Delta V_2}{N_2}$$

$$\Phi_E = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon}$$

La prima legge di Maxwell è il teorema di Gauss per il campo elettrico. La legge afferma che il **flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è dato dalla somma delle cariche interne alla superficie diviso la costante dielettrica**. Questa legge è l'equivalente matematico del campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme così come previsto dalla legge di Coulomb.

$$\Phi_B = 0$$

La seconda legge di Maxwell è il teorema di Gauss per il campo magnetico. La legge afferma che il **flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è 0**. Questa equazione si ottiene dal fatto che le linee di campo del campo magnetico sono linee chiuse che non si intersecano tra loro. La legge è la traduzione matematica del fatto che non esistono le cariche magnetiche.

$$C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

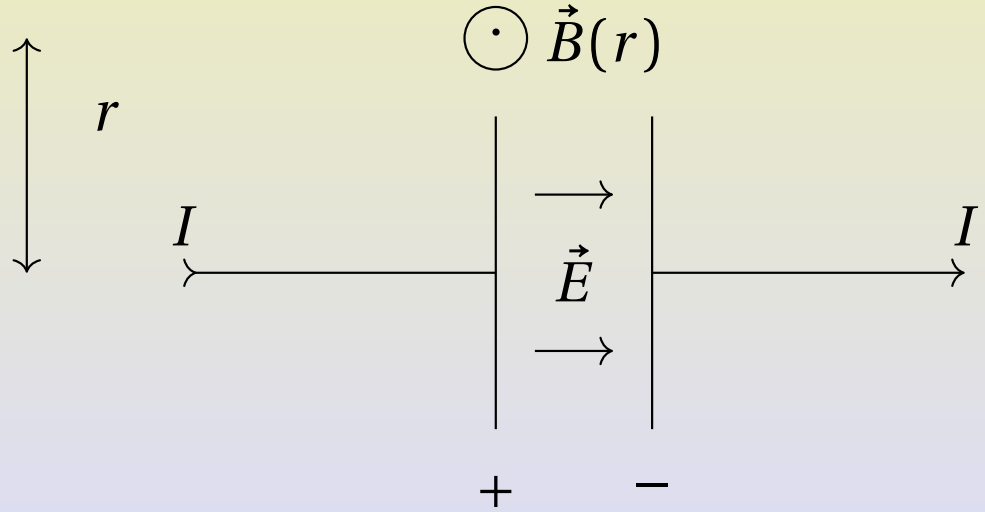
La terza legge di Maxwell è la generalizzazione matematica della legge di Faraday-Neumann-Lenz (la circuitazione del campo elettrico corrisponde alla differenza di potenziale). La legge afferma che la **circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa è pari all'opposto della variazione del flusso di campo magnetico nel tempo attraverso una superficie aperta il cui bordo è la linea chiusa lungo la quale si calcola circuitazione**.

$$C_B = \mu \sum_i I_i + \mu\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

La quarta legge di Maxwell è il completamento del teorema di Ampere (al quale si aggiunge un addendo necessario alla conservazione della carica elettrica). La legge afferma che la **circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa dipende dalla somma delle correnti concatenate e dalla variazione del flusso del campo elettrico nel tempo attraverso una superficie aperta il cui bordo è la linea chiusa lungo la quale si calcola circuitazione**. Il termine $\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$ è detto corrente di spostamento.

Giustificazione dell'espressione della corrente di spostamento (1)

Consideriamo in filo rettilineo percorso da una corrente costante I, il filo è interrotto in un tratto da un condensatore circolare (in modo che il sistema fisico sia invariante per rotazioni attorno al filo).



Giustificazione dell'espressione della corrente di spostamento (2)

Su bordo tra condensatore (di sezione S e distanza tra le piastre h) e filo il campo magnetico e la sua circuitazione possono essere considerati come effetto della corrente o della variazione del campo elettrico interno al condensatore. In formule:

$$C_B = \mu I = \mu \frac{dQ}{dt} = \mu \frac{C\,dV}{dt} = \mu \frac{S\varepsilon}{h} \frac{dV}{dt} = \mu \frac{S\varepsilon}{h} \frac{h\,dE}{dt} =$$

$$= \mu\varepsilon \frac{d(SE)}{dt} = \mu\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

In sintesi le cinque leggi che governano tutti i fenomeni elettromagnetici sono:

$$\Phi_E = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon}$$

$$\Phi_B = 0$$

$$C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$C_B = \mu \sum_i I_i + \mu\varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

In assenza di cariche elettriche le leggi di Maxwell diventano:

$$\Phi_E = 0$$

$$\Phi_B = 0$$

$$C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$C_B = \mu\varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- la direzione di propagazione è parallela ed equiversa a $\vec{E} \times \vec{B}$ o $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- la direzione di propagazione è parallela ed equiversa a $\vec{E} \times \vec{B}$ o $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$
- $E = cB$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- la direzione di propagazione è parallela ed equiversa a $\vec{E} \times \vec{B}$ o $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$
- $E = cB$
- densità di energia istantanea: $u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2$

Dalle equazioni di Maxwell in assenza di cariche elettriche è possibile ricavare che l'oscillazione di campi elettromagnetici nel tempo origina un fenomeno ondulatorio, le onde elettromagnetiche, per le quali:

- $\vec{E} \perp \vec{B}$
- la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- la direzione di propagazione è parallela ed equiversa a $\vec{E} \times \vec{B}$ o $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$
- $E = cB$
- densità di energia istantanea: $u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2$
- densità di energia media: $\overline{u} = \frac{1}{2}\varepsilon E_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2\mu}B_{\text{max}}^2$

Assioma 1: Invarianza delle leggi fisiche

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Assioma 1: Invarianza delle leggi fisiche

Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Assioma 2: Costanza della velocità della luce

La velocità della luce nel vuoto (c), è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali ed è indipendente dal moto della sorgente o dell'osservatore.

Due osservatori O e O' rilevano all'istante $t = t' = 0$ l'emissione di un raggio laser lungo la direzione dell'asse y:

- osservatore O si muove lungo l'asse x a velocità costante

Due osservatori O e O' rilevano all'istante $t = t' = 0$ l'emissione di un raggio laser lungo la direzione dell'asse y:

- osservatore O si muove lungo l'asse x a velocità costante
- osservatore O' si muove lungo l'asse $x' \parallel x$ a velocità costante

Due osservatori O e O' rilevano all'istante $t = t' = 0$ l'emissione di un raggio laser lungo la direzione dell'asse y:

- osservatore O si muove lungo l'asse x a velocità costante
- osservatore O' si muove lungo l'asse $x' \parallel x$ a velocità costante
- l'evento A è l'emissione del raggio laser

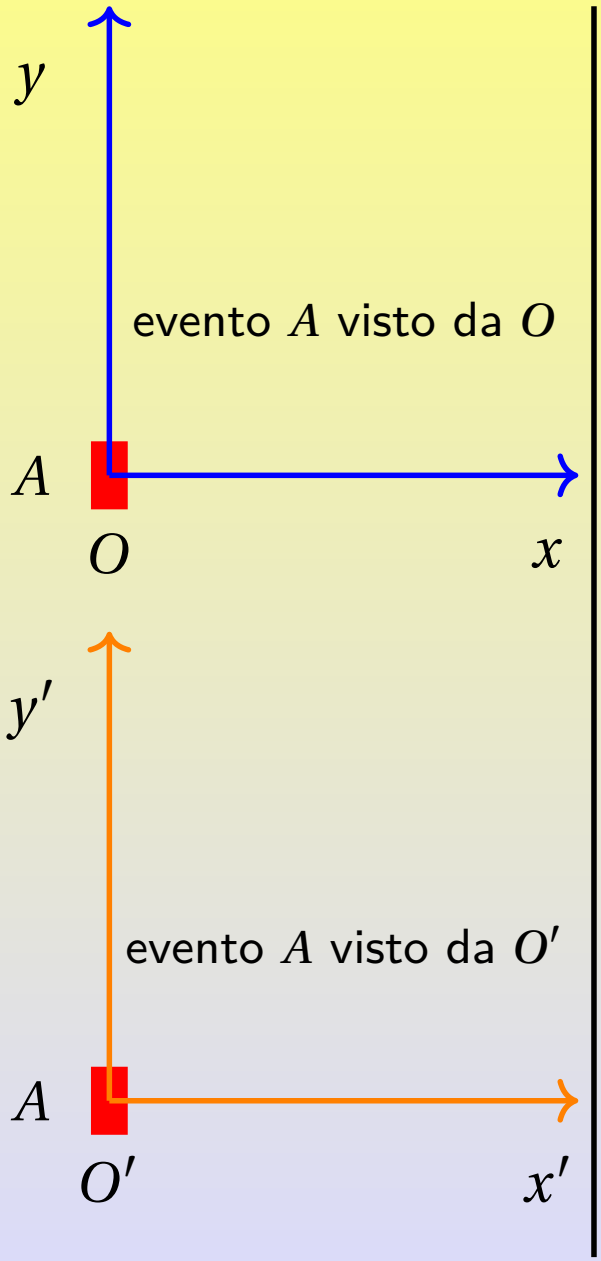
Due osservatori O e O' rilevano all'istante $t = t' = 0$ l'emissione di un raggio laser lungo la direzione dell'asse y:

- osservatore O si muove lungo l'asse x a velocità costante
- osservatore O' si muove lungo l'asse $x' \parallel x$ a velocità costante
- l'evento A è l'emissione del raggio laser
- l'evento B è l'assorbimento del raggio laser da parte di un ricevitore

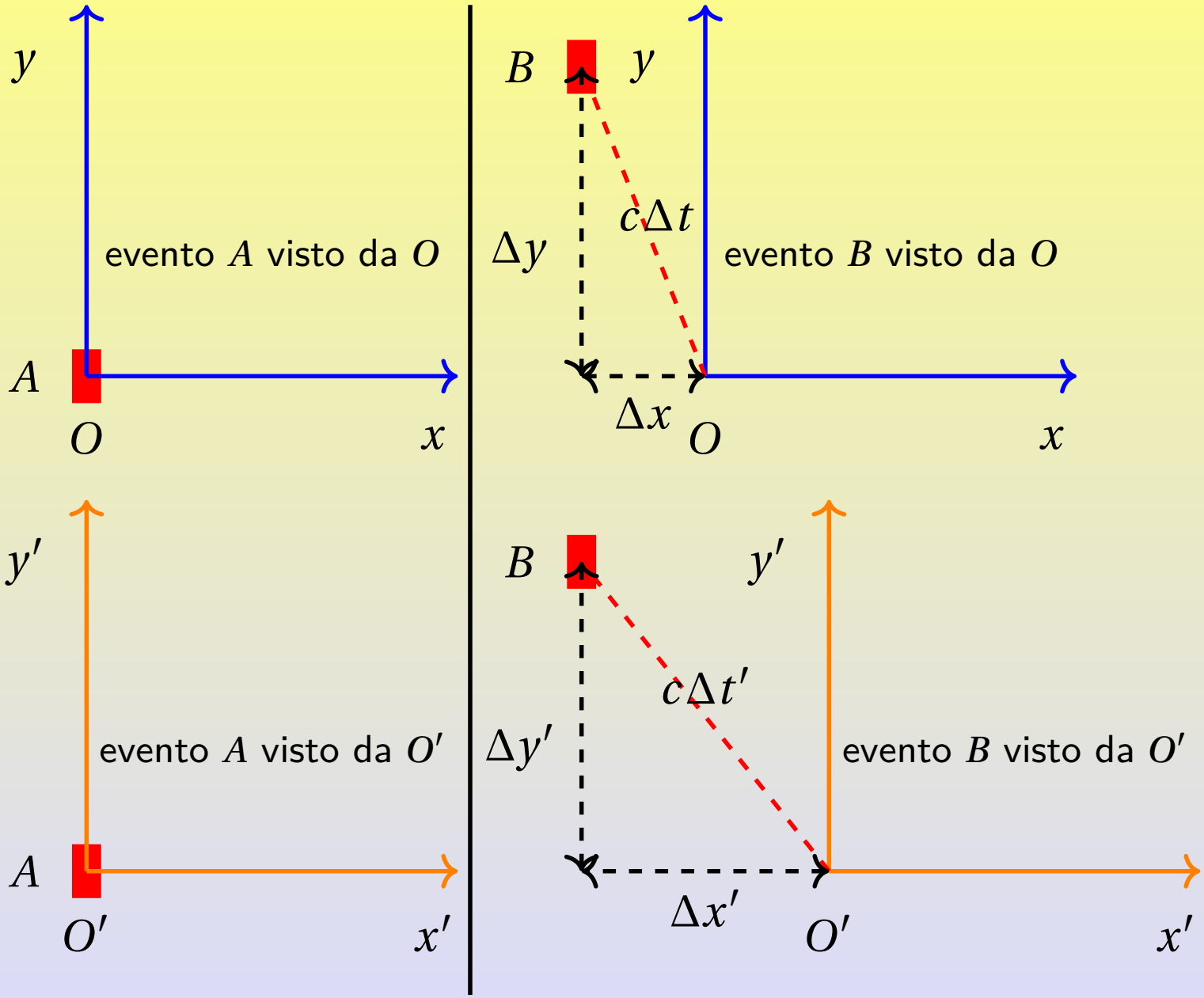
Due osservatori O e O' rilevano all'istante $t = t' = 0$ l'emissione di un raggio laser lungo la direzione dell'asse y:

- osservatore O si muove lungo l'asse x a velocità costante
- osservatore O' si muove lungo l'asse $x' \parallel x$ a velocità costante
- l'evento A è l'emissione del raggio laser
- l'evento B è l'assorbimento del raggio laser da parte di un ricevitore
- O e O' si muovono solo lungo l'asse $x \parallel x'$ quindi per indipendenza delle diverse direzioni $y = y'$

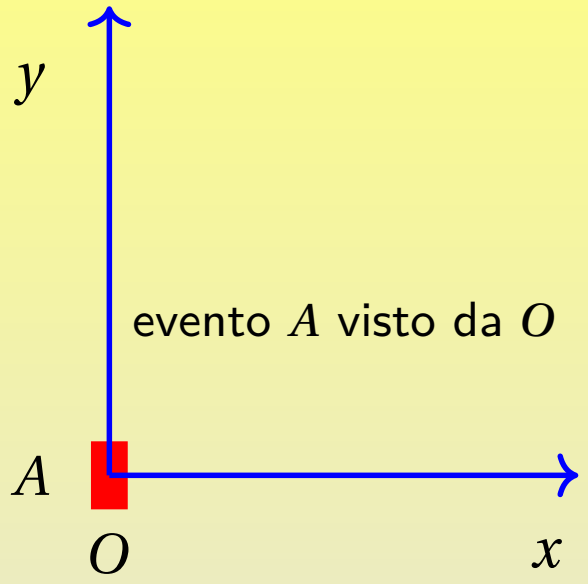
Orologio luce

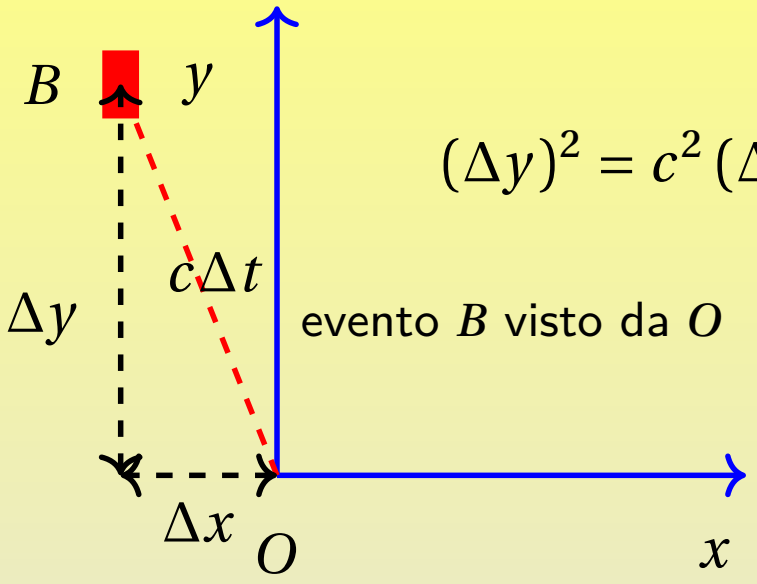


Orologio luce

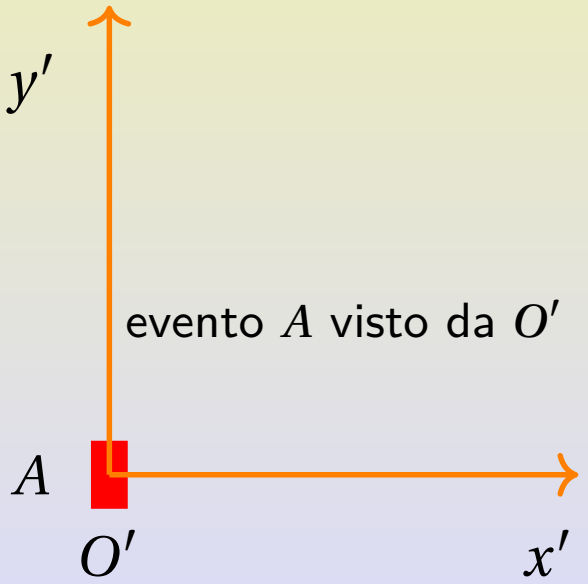


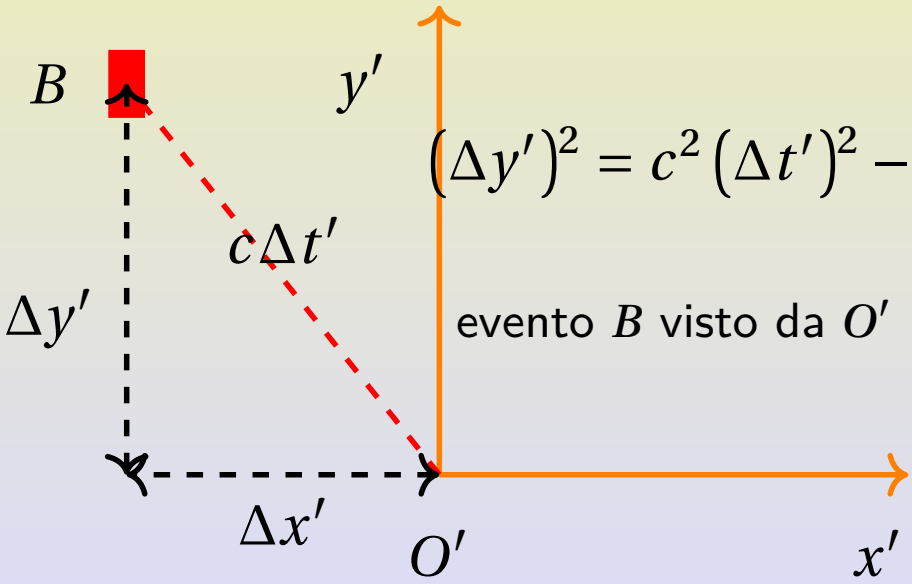
Orologio luce





$$(\Delta y)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$





$$(\Delta y')^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

Intervallo spazio-tempo e sua conservazione

$$\Delta y = \Delta y' \rightarrow$$

$$\rightarrow (\Delta y)^2 = \left(\Delta y'\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \left(\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'\right)^2$$

Intervallo spazio-tempo tra gli eventi A e B misurato da O:

$$(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Intervallo spazio-tempo tra gli eventi A e B misurato da O':

$$\left(\Delta s'\right)^2 = c^2 \left(\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'\right)^2$$

Due diversi osservatori O e O' misurano spazio e tempo in sistemi di riferimento rispettivamente $x-t$ e $x'-t'$.

Due diversi osservatori O e O' misurano spazio e tempo in sistemi di riferimento rispettivamente $x-t$ e $x'-t'$.

Secondo la fisica classica:

$$\begin{cases} \Delta x^2 = \Delta x'^2 \\ \Delta t^2 = \Delta t'^2 \end{cases}$$

spazio e tempo vengono misurati separatamente e con le stesse variazioni da tutti gli osservatori.

Due diversi osservatori O e O' misurano spazio e tempo in sistemi di riferimento rispettivamente $x-t$ e $x'-t'$.

Secondo la fisica classica:

$$\begin{cases} \Delta x^2 = \Delta x'^2 \\ \Delta t^2 = \Delta t'^2 \end{cases}$$

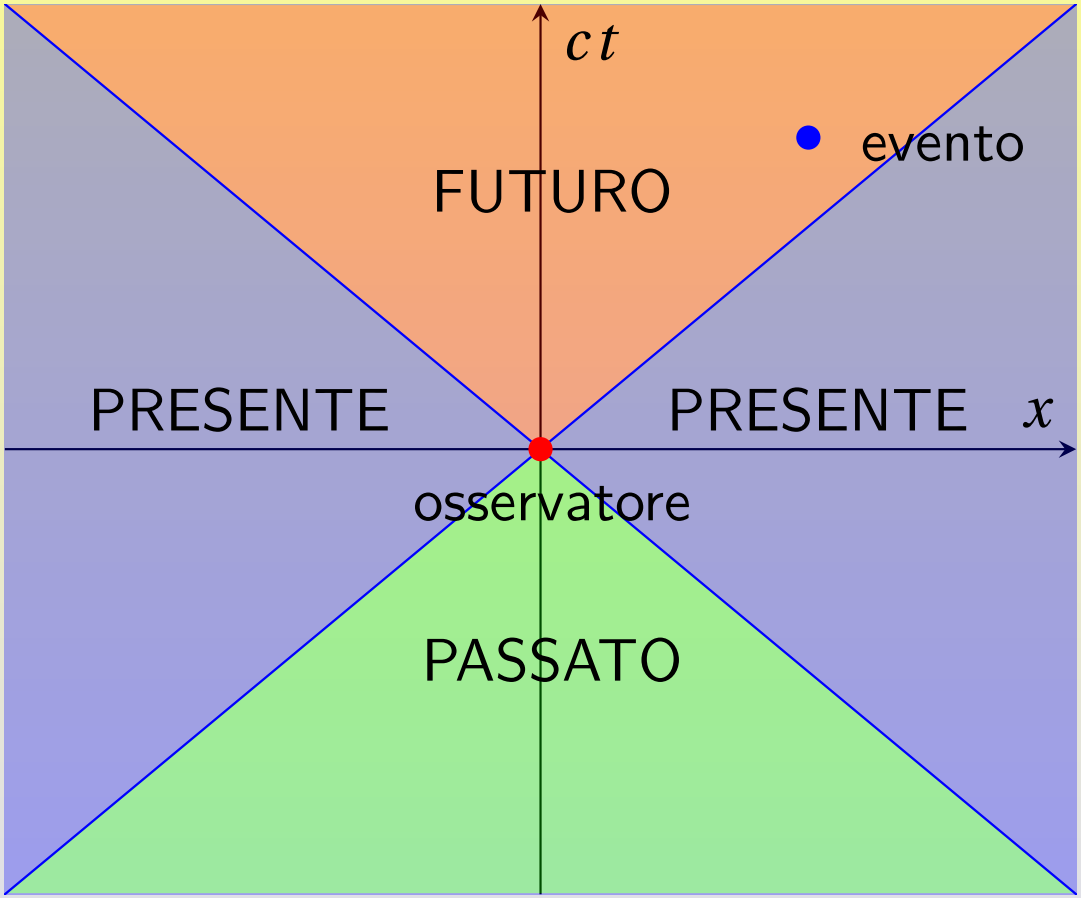
spazio e tempo vengono misurati separatamente e con le stesse variazioni da tutti gli osservatori.

Secondo la fisica relativistica:

$$(\Delta s)^2 = \left(\Delta s'\right)^2$$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2\left(\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'\right)^2$$

diversi osservatori misurano la stessa velocità della luce e gli stessi intervalli spazio-tempo.


ct
evento
FUTURO
PRESENTE
PRESENTE
x
osservatore
PASSATO

Definizioni delle funzioni iperboliche:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

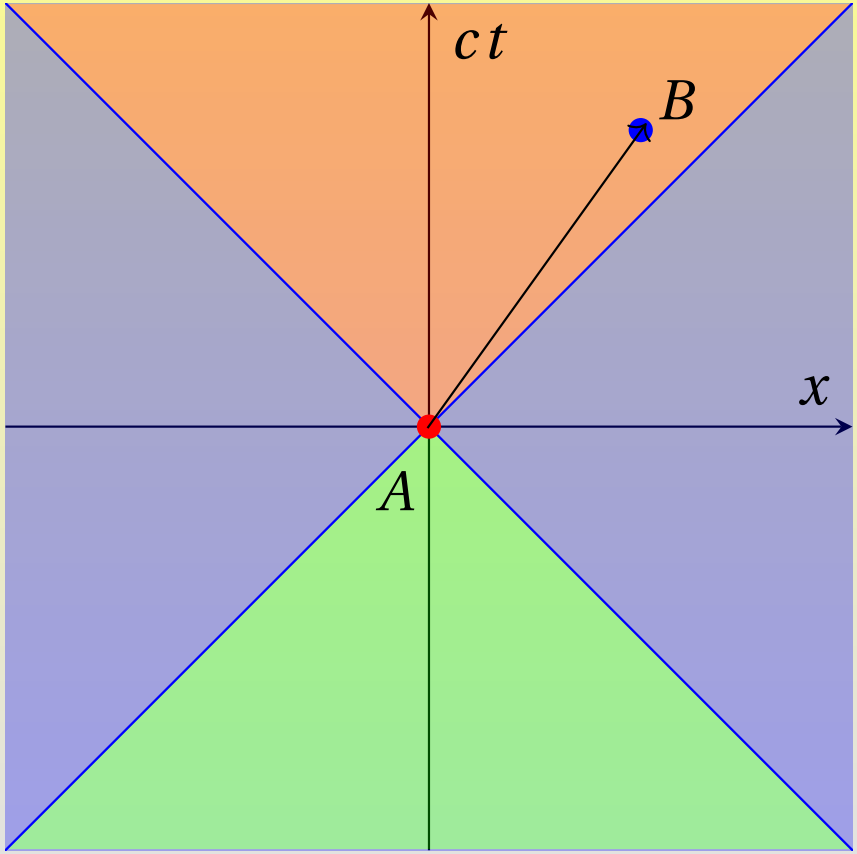
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Alcune proprietà delle funzioni iperboliche:

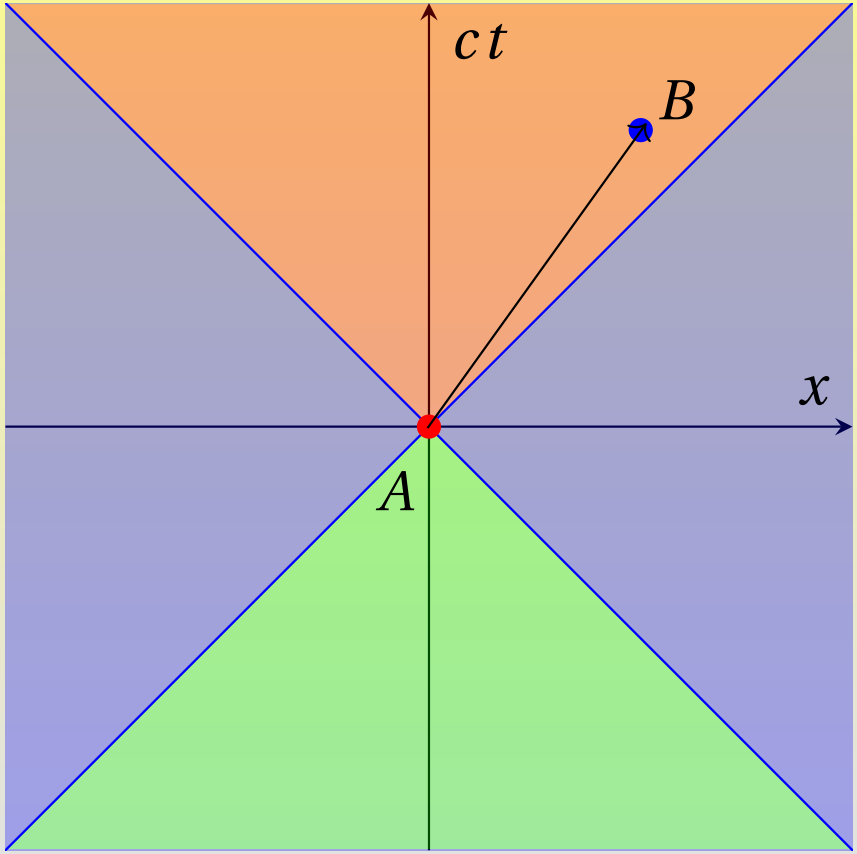
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

α è un parametro detto fattore di rapidità



α è un parametro detto fattore di rapidità



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{AB}\right|^2 = c^2 t^2 - x^2$$

$$\begin{cases} x = \left|\vec{AB}\right| \sinh(\alpha) \\ t = \left|\vec{AB}\right| \frac{\cosh(\alpha)}{c} \end{cases}$$

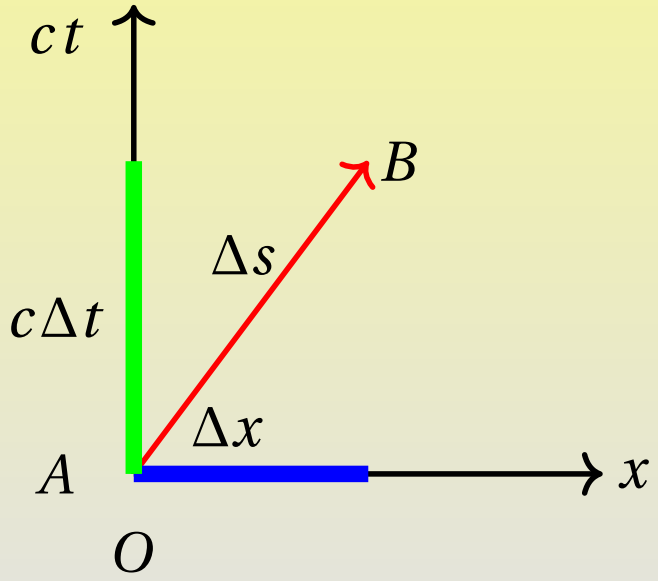
$$v = \frac{x}{t} = c \frac{\left|\vec{AB}\right| \sinh(\alpha)}{\left|\vec{AB}\right| \cosh(\alpha)}$$

$$\frac{v}{c} = \tanh(\alpha)$$

α è un parametro detto fattore di rapidità

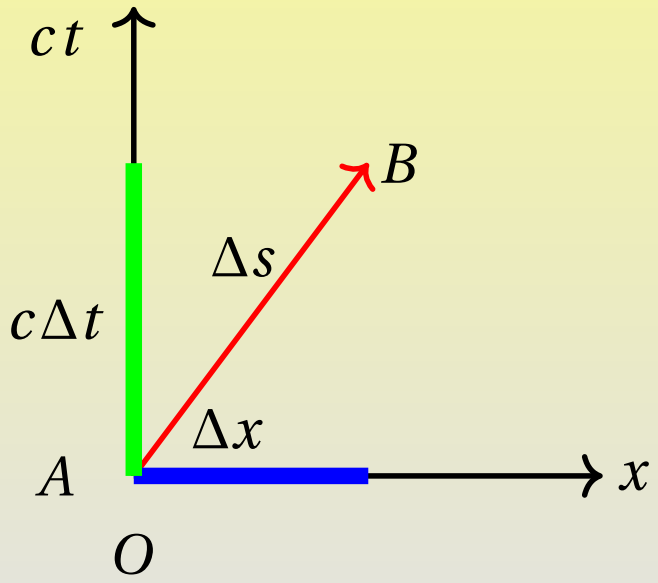
Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.

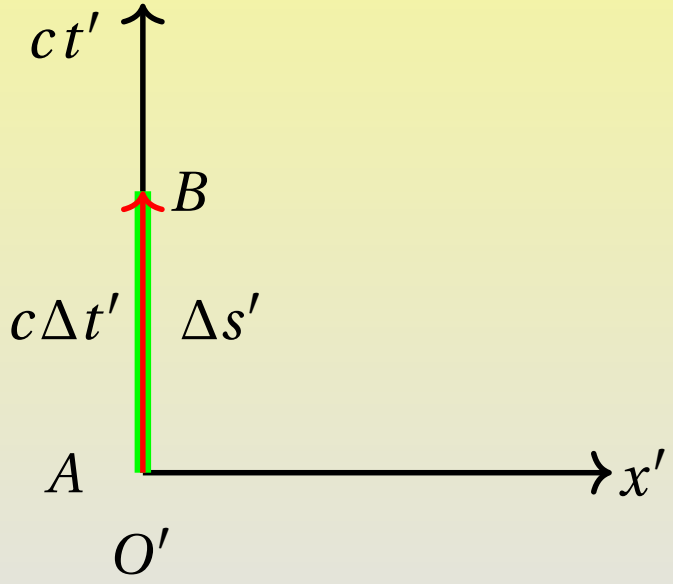


Per l'osservatore O, i due eventi avvengono in tempi e posizioni diverse.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.



Per l'osservatore O, i due eventi avvengono in tempi e posizioni diverse.



Per l'osservatore O', i due eventi avvengono nella stessa posizione, in tempi diversi.

Per la conservazione dell'intervallo spazio tempo si ha:

$$(\Delta s)^2 = \left(\Delta s'\right)^2$$

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \left(\Delta t'\right)^2$$

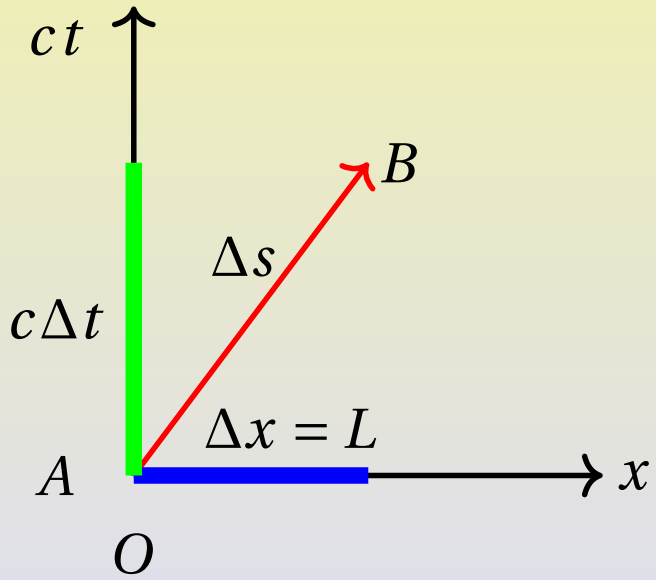
$$c^2 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 = c^2 \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2$$

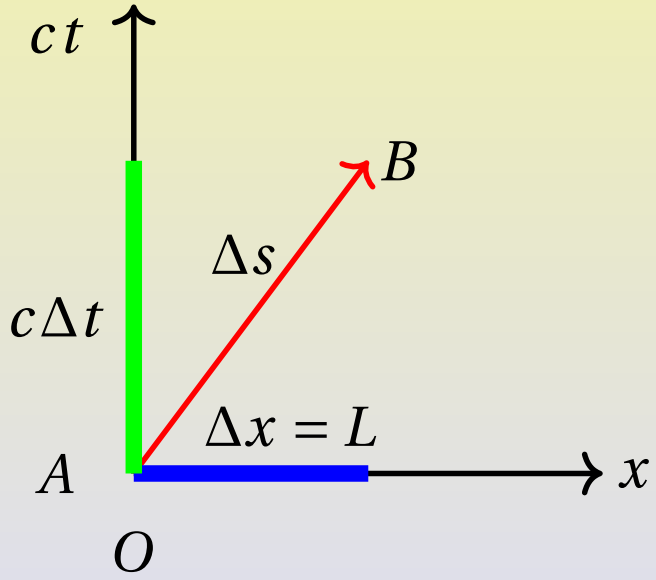
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

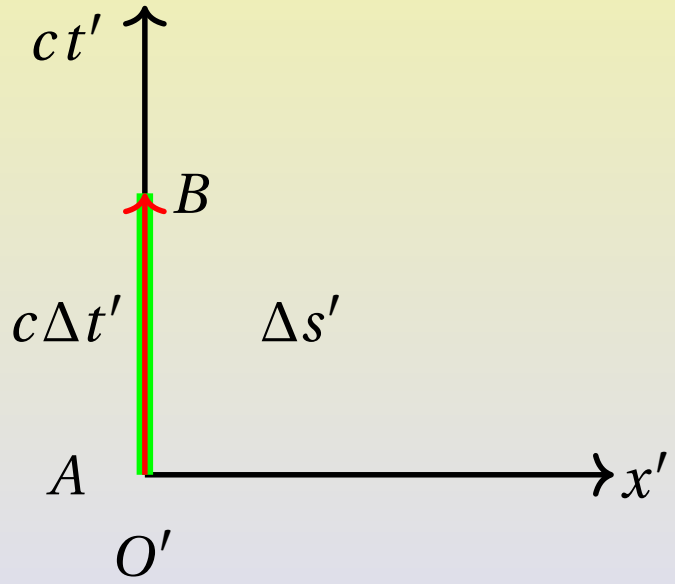
Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo un segmento di lunghezza L nel sistema di O. Sia l'evento A, il passaggio di O' sulla prima estremità del segmento, sia B, il passaggio di O' sulla estremità opposta del segmento.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo un segmento di lunghezza L nel sistema di O. Sia l'evento A, il passaggio di O' sulla prima estremità del segmento, sia B, il passaggio di O' sulla estremità opposta del segmento.



Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo un segmento di lunghezza L nel sistema di O. Sia l'evento A, il passaggio di O' sulla prima estremità del segmento, sia B, il passaggio di O' sulla estremità opposta del segmento.





Per la conservazione dell'intervallo spazio tempo si ha:

$$(\Delta s)^2 = \left(\Delta s'\right)^2$$

$$c^2\,(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2\left(\Delta t'\right)^2$$

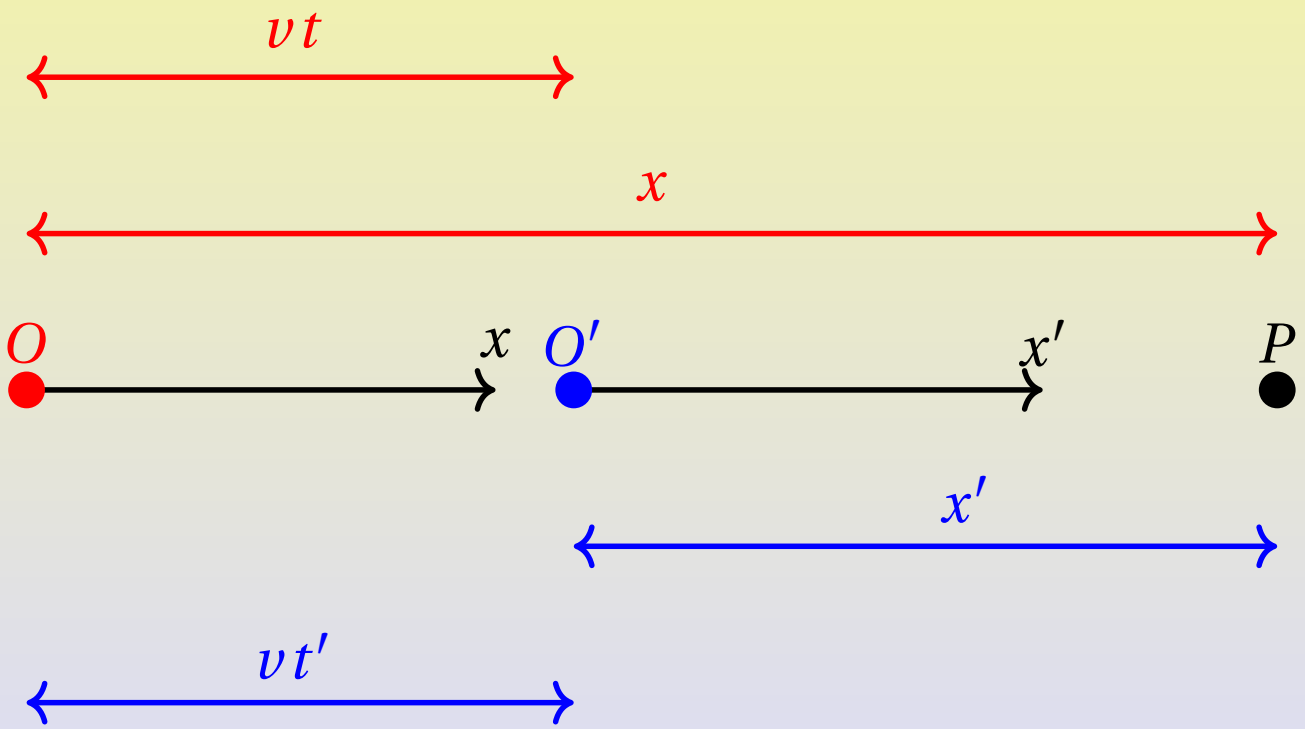
La lunghezza L del segmento misurata da O è rappresentata da Δx mentre possiamo affermare che secondo O' il segmento si è spostato di una distanza $L' = v\Delta t'$, quindi

$$c^2\left(\frac{L}{v}\right)^2 - L^2 = c^2\left(\frac{L'}{v}\right)^2$$

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma}$$

Le misure di L e di L' non avvengono simultaneamente.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità v rispetto a O, $x \parallel x'$. Entrambi gli osservatori descrivono un punto P. All'istante 0 (per entrambi gli osservatori) essi sono nello stesso punto.



La distanza $O'P$ nel sistema di O' è misurata direttamente, per O è $x - vt$, considerato quanto visto sulla contrazione delle lunghezze si può scrivere:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt)$$

La distanza OP nel sistema di O è misurata direttamente, per O' è $x' + vt'$, considerato quanto visto sulla contrazione delle lunghezze si può scrivere:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt')$$

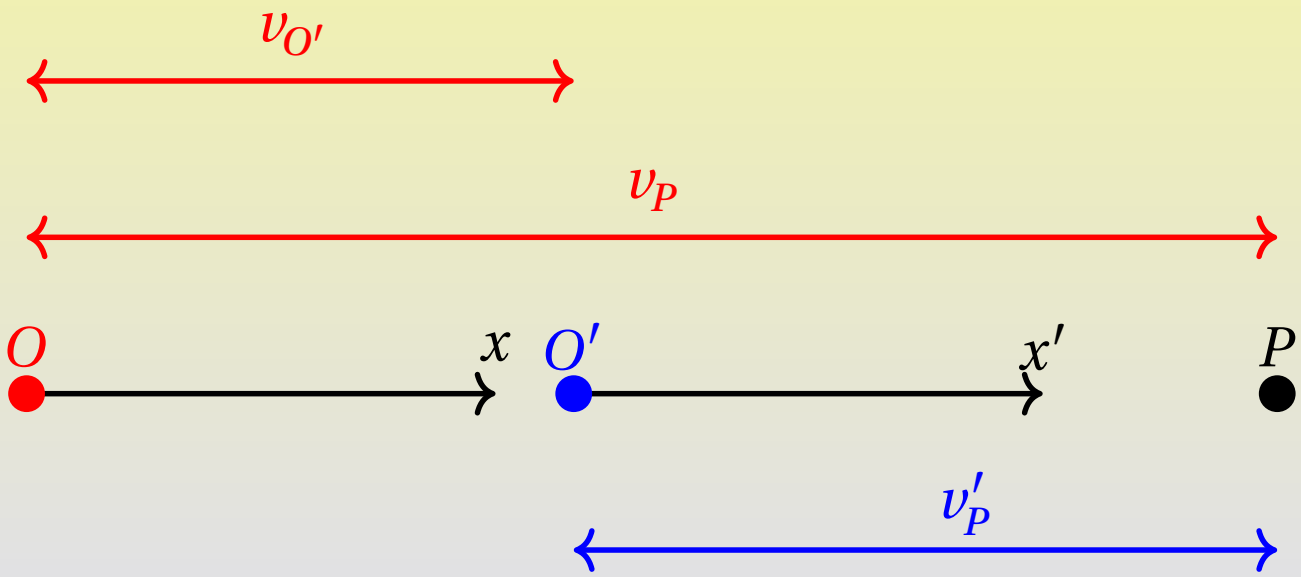
Dalle due relazioni precedenti sostituendo x' dalla prima nella seconda otteniamo:

$$x = \frac{\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità v rispetto a O, $x \parallel x'$. All'istante 0 (per entrambi gli osservatori) essi sono nello stesso punto P.



Utilizzando le trasformazioni di Lorentz si ottengono le relazioni:

$$v_P = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + v_{O'}t')}{\gamma\left(t' + \frac{v_{O'}}{c^2}x'\right)} = \frac{x' + v_{O'}t'}{t' + \frac{v_{O'}}{c^2}x'} = \frac{v'_P + v_{O'}}{1 + \frac{v_{O'}v'_P}{c^2}}$$

$$v'_P = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - v_{O'}t)}{\gamma\left(t - \frac{v_{O'}}{c^2}x\right)} = \frac{x - v_{O'}t}{t - \frac{v_{O'}}{c^2}x} = \frac{v_P - v_{O'}}{1 - \frac{v_{O'}v_P}{c^2}}$$

Le trasformazioni di Lorentz delle velocità possono essere riscritte con le tangenti iperboliche e i fattori di rapidità:

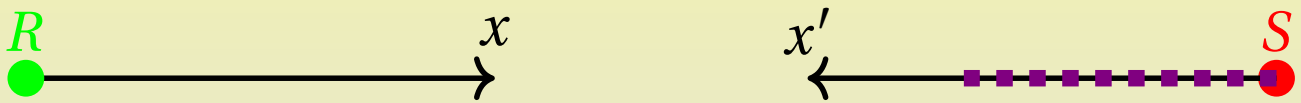
$$v_P = \frac{v'_P + v_{O'}}{1 + \frac{v_{O'} v'_P}{c^2}} \rightarrow \frac{v_P}{c} = \frac{\frac{v'_P}{c} + \frac{v_{O'}}{c}}{1 + \frac{v_{O'}}{c}\frac{v'_P}{c}} \rightarrow$$

$$\tanh(\alpha) = \frac{\tanh(\alpha') + \tanh(\beta)}{1 + \tanh(\alpha')\tanh(\beta)} = \tanh(\alpha' + \beta) \rightarrow$$

$$\alpha = \alpha' + \beta$$

essendo α il fattore di rapidità del punto P visto da O, α' il fattore di rapidità del punto P visto da O', β il fattore di rapidità del punto O' visto da O.

Ricaveremo l'espressione dell'effetto Doppler per onde elettromagnetiche (che si muovono a velocità di modulo c) tra una sorgente S e un ricevente R con una velocità relativa di modulo v. Lo schema riporta una possibile modellizzazione.



In questo caso per il ricevente la velocità delle onde elettromagnetiche sarà $-c$, per la sorgente sarà c. Per la modellizzazione scelta in caso di avvicinamento la velocità relativa per sorgente e ricevente sarà $-v$ e in caso di allontanamento sarà v.

I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale

I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale

I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale
- C, arrivo al ricevente del secondo segnale

I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale
- C, arrivo al ricevente del secondo segnale
- D, arrivo al ricevente del primo segnale

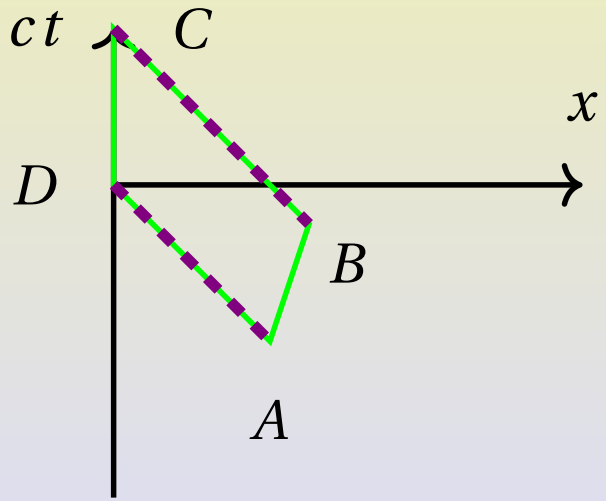
I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale
- C, arrivo al ricevente del secondo segnale
- D, arrivo al ricevente del primo segnale

I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale
- C, arrivo al ricevente del secondo segnale
- D, arrivo al ricevente del primo segnale

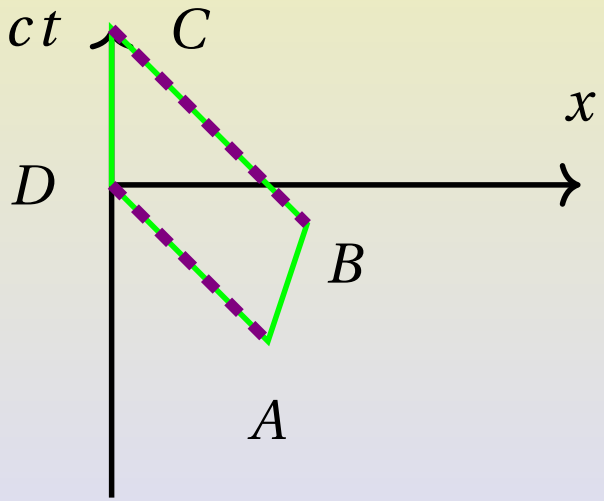
per il ricevente:



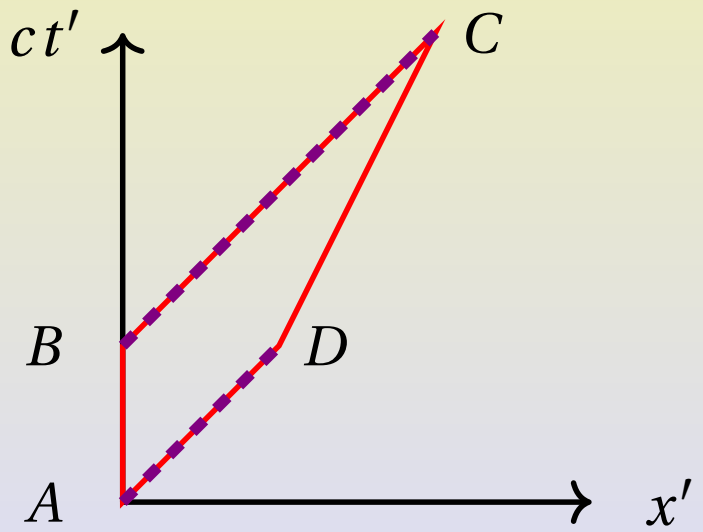
I diagrammi spazio-tempo rappresentano gli eventi:

- A, partenza dalla sorgente di un primo segnale
- B, partenza dalla sorgente di un secondo segnale
- C, arrivo al ricevente del secondo segnale
- D, arrivo al ricevente del primo segnale

per il ricevente:



per la sorgente:



Il periodo della sorgente è T_S (AB), il periodo del ricevente è T_R (DC). Per la conservazione dell'intervallo spazio-tempo:

$$\begin{cases} \Delta s^2_{AB} = \Delta s'^2_{AB} \\ \Delta s^2_{DC} = \Delta s'^2_{DC} \end{cases}$$

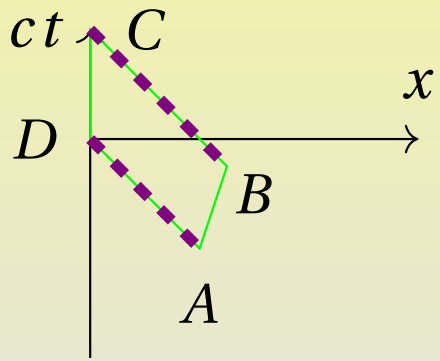
$$\begin{cases} c^2\Delta t^2_{AB} - \Delta x^2_{AB} = c^2 T_S^2 \\ c^2 T_R^2 = c^2\Delta t'^2_{DC} - \Delta x'^2_{DC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 - v^2 = c^2\left(\frac{T_S}{\Delta t_{AB}}\right)^2 \\ c^2\left(\frac{T_R}{\Delta t'_{DC}}\right)^2 = c^2 - v^2 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{T_S}{\Delta t_{AB}}\right)^2 = \left(\frac{T_R}{\Delta t'_{DC}}\right)^2$$

Per concludere è sufficiente ricavare le relazioni tra periodi e intervalli di tempo nei due sistemi di riferimento:

Per concludere è sufficiente ricavare le relazioni tra periodi e intervalli di tempo nei due sistemi di riferimento:

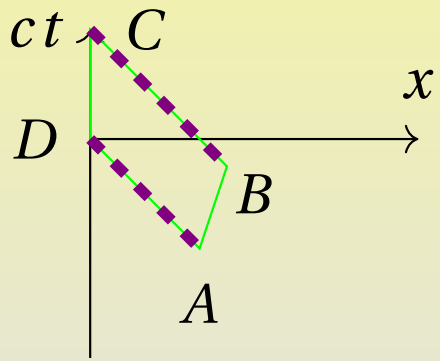
per il ricevente:



$A(x_A, ct_A)$, $B(x_B, ct_B)$, $C(0, cT_R)$,
$D(0,0)$, $ct_B = -x_B + cT_R$,
$ct_A = -x_A$.

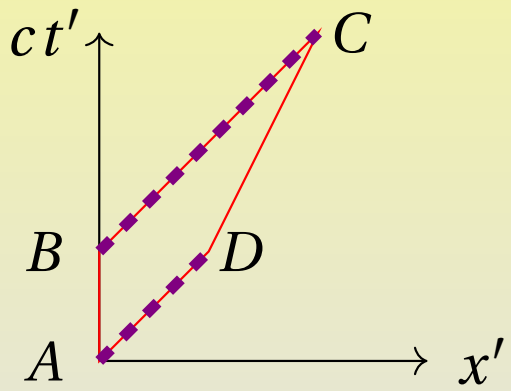
Per concludere è sufficiente ricavare le relazioni tra periodi e intervalli di tempo nei due sistemi di riferimento:

per il ricevente:



$A(x_A, ct_A)$, $B(x_B, ct_B)$, $C(0, cT_R)$,
$D(0,0)$, $ct_B = -x_B + cT_R$,
$ct_A = -x_A$.

per la sorgente:



$A(0,0)$, $B(0, cT_S)$, $C(x'_C, ct'_C)$,
$D(x'_D, ct'_D)$, $ct'_C = x'_C + cT_S$,
$ct'_D = x'_D$.

$$c\,t_B - c\,t_A = -x_B + x_A + c\,T_R$$

$$c\,\Delta t_{AB} = -\Delta x_{AB} + c\,T_R$$

$$c = -v + c\,\frac{T_R}{\Delta t_{AB}}$$

$$\Delta t_{AB} = \frac{c}{c+v}\,T_R$$

Effetto Doppler

$$c\,t_B - c\,t_A = -x_B + x_A + c\,T_R$$

$$c\,\Delta t_{AB} = -\Delta x_{AB} + c\,T_R$$

$$c = -v + c\,\frac{T_R}{\Delta t_{AB}}$$

$$\Delta t_{AB} = \frac{c}{c+v}\,T_R$$

$$c\,t'_C - c\,t'_D = x'_C - x'_D + c\,T_S$$

$$c\,\Delta t'_{DC} = \Delta x'_{DC} + c\,T_S$$

$$c = v + c\,\frac{T_S}{\Delta t'_{DC}}$$

$$\Delta t'_{DC} = \frac{c}{c-v}\,T_S$$

in conclusione:

$$\left(\frac{T_S}{\Delta t_{AB}}\right)^2 = \left(\frac{T_R}{\Delta t'_{DC}}\right)^2$$

$$\left(\frac{T_S}{\frac{c}{c+v}T_R}\right)^2 = \left(\frac{T_R}{\frac{c}{c-v}T_S}\right)^2$$

$$(c+v)T_S^2 = (c-v)T_R^2$$

$$T_R = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}T_S$$

Relazioni dell'effetto Doppler per onde elettromagnetiche:

$$T_R = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T_S$$

$$f_R = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_S$$

$$\lambda_R = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \lambda_S$$

$$v = c\frac{\left(\frac{T_R}{T_S}\right)^2 - 1}{\left(\frac{T_R}{T_S}\right)^2 + 1} = c\frac{\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_S}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_S}\right)^2 + 1} = c\frac{1 - \left(\frac{f_R}{f_S}\right)^2}{1 + \left(\frac{f_R}{f_S}\right)^2}$$

I muoni, modello semplificato (1)

I muoni sono particelle elementari che in laboratorio mostrano avere una vita di $1,5 \cdot 10^{-6} s$. I raggi cosmici interagendo con alcune particelle presenti nell'atmosfera ad una altezza di $15 km$ generano muoni i quali giungono sulla superficie terrestre e poi decadono. Quanto tempo impiegano i muoni a giungere sulla superficie per un osservatore posto sulla superficie terrestre? A quale velocità viaggiano?

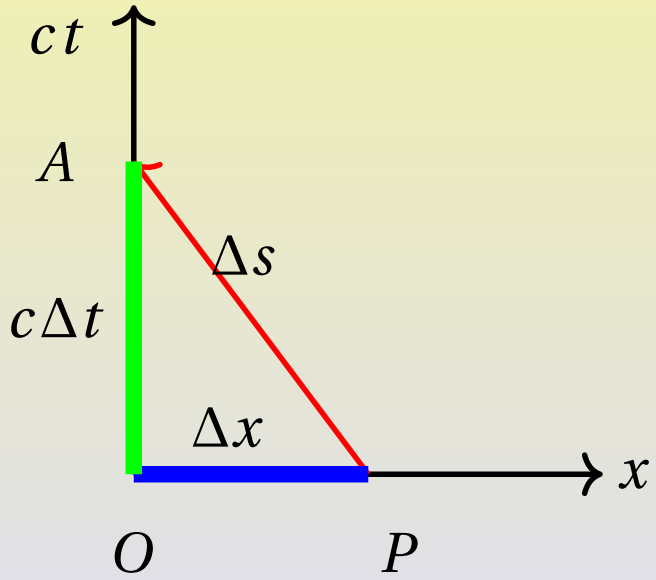
I muoni, modello semplificato (2)

Consideriamo gli eventi: P, generazione dei muoni; A, arrivo dei muoni sulla terra.

I muoni, modello semplificato (2)

Consideriamo gli eventi: P, generazione dei muoni; A, arrivo dei muoni sulla terra.

Per l'osservatore a terra:

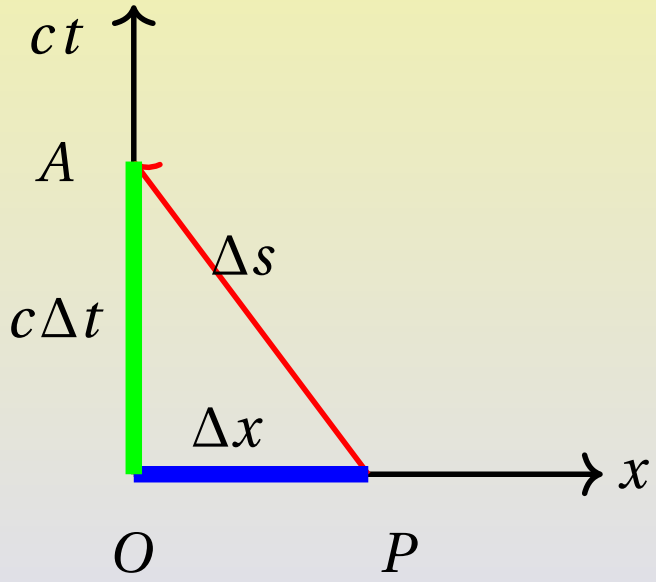


$\Delta x = 1,5 \cdot 10^4 m$

I muoni, modello semplificato (2)

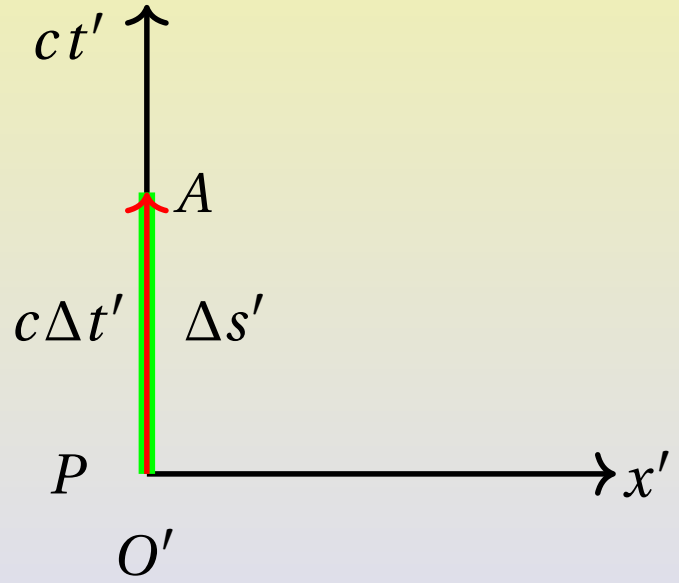
Consideriamo gli eventi: P, generazione dei muoni; A, arrivo dei muoni sulla terra.

Per l'osservatore a terra:



$\Delta x = 1,5 \cdot 10^4 m$

Per un osservatore solidale con i muoni:



$\Delta t' = 1,5 \cdot 10^{-6} s$

I muoni, modello semplificato (3)

Per la conservazione dell'intervallo spazio-tempo si ha:

$$(\Delta s)^2 = \left(\Delta s'\right)^2$$

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t'^2 + \frac{\Delta x^2}{c^2}} = 5,005709366 \cdot 10^{-5} s = 33,3\Delta t'$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2,996578288 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 0,9996c$$

“Paradosso” dei gemelli (1)

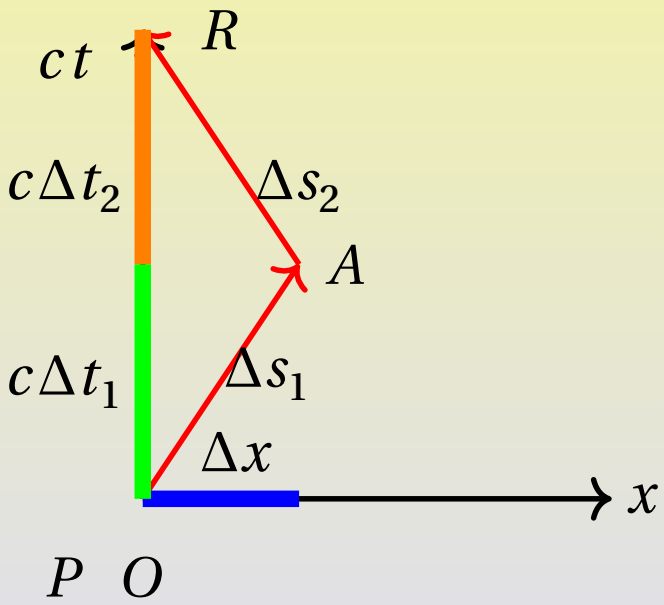
Di due fratelli gemelli uno fa l'astronauta, l'altro il docente di fisica. All'età di 30 anni il gemello astronauta parte per Proxima Centauri (distante dalla $3,97 \cdot 10^{16} m$ Terra). La missione prevede di viaggiare a velocità costante fino a Proxima Centauri e poi tornare indietro alla medesima velocità. Il gemello docente di fisica all'età di 70 anni si reca in Florida ad accogliere il fratello in ritorno dalla missione e lo trova più giovane di quanto egli sia. Che età ha il fratello astronauta al suo rientro?

“Paradosso” dei gemelli (2)

Consideriamo gli eventi: P, partenza dalla Terra del gemello astronauta; A, arrivo su Proxima Centauri; R, ritorno sulla Terra della missione.

"Paradosso" dei gemelli (2)

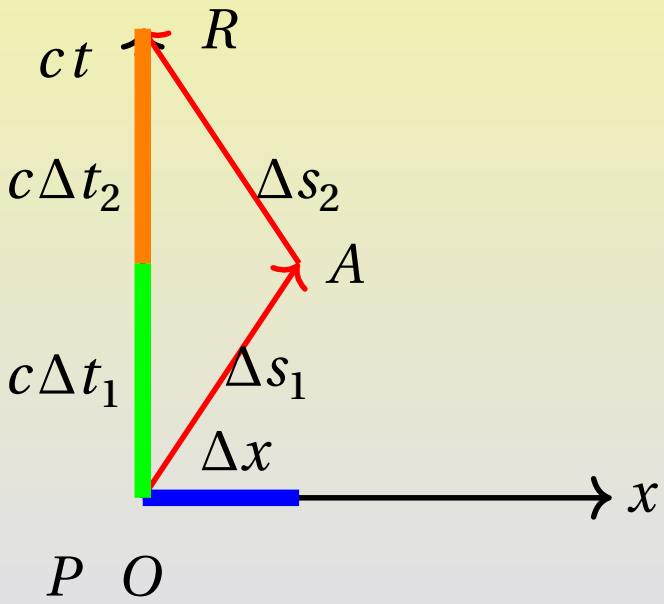
Consideriamo gli eventi: P, partenza dalla Terra del gemello astronauta; A, arrivo su Proxima Centauri; R, ritorno sulla Terra della missione.
Per il gemello a terra:



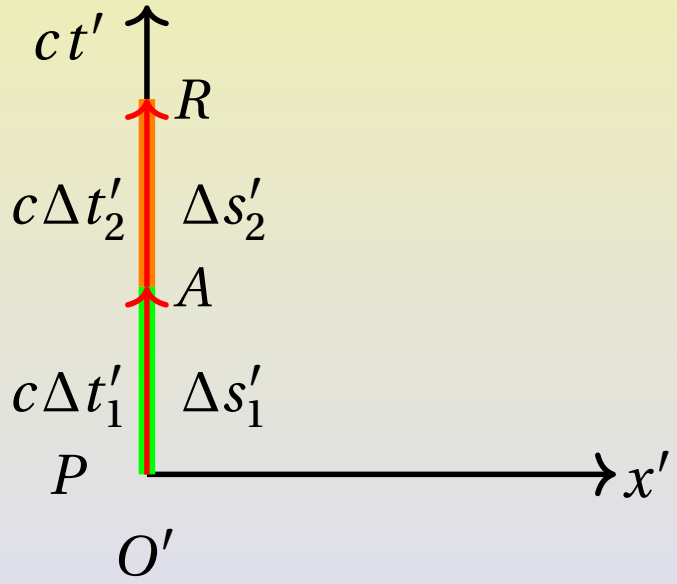
$$\Delta x = 3,97 \cdot 10^{16} m,$$
$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 1,261 \cdot 10^{9} s$$

"Paradosso" dei gemelli (2)

Consideriamo gli eventi: P, partenza dalla Terra del gemello astronauta; A, arrivo su Proxima Centauri; R, ritorno sulla Terra della missione.
Per il gemello a terra:



Per il gemello astronauta:



$$\Delta x = 3,97 \cdot 10^{16} m,$$
$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 1,261 \cdot 10^{9} s$$

"Paradosso" dei gemelli (3)

Essendo $v = \frac{\Delta x}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t_2} \rightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2 = 6,307 \cdot 10^8 s$ si ha che $v = 6,295 \cdot 10^7 \frac{m}{s} = 0,21c$. Per la conservazione degli intervalli spazio-tempo:

$$\begin{cases} \Delta s_1^2 = \Delta s_1'^2 \\ \Delta s_2^2 = \Delta s_2'^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c^2\Delta t_1^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t_1'^2 \\ c^2\Delta t_2^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t_2'^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta t_1' = \Delta t_1\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \Delta t_2' = \Delta t_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases} \rightarrow \Delta t_1' + \Delta t_2' = 1,233 \cdot 10^9 s$$

Il gemello astronauta torna più giovane del fratello insegnante di 32,5 giorni, ha quindi 70 anni meno 32,5 giorni.

“Paradosso” dei gemelli (4)

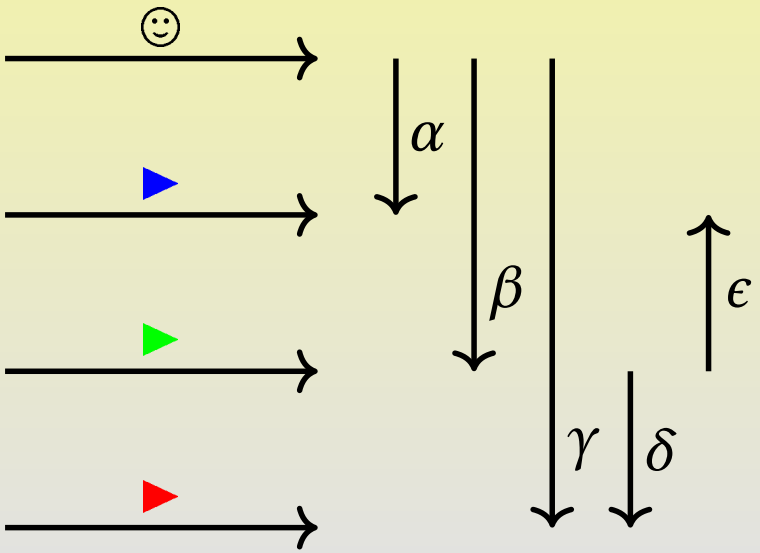
La conclusione a cui siamo giunti potrebbe sembrare paradossale o contraddittoria perché in definitiva entrambi i gemelli partono e arrivano nello stesso punto spazio-temporale, per quale motivo dovrebbero giungervi in modi diversi? I due sistemi di riferimento (quello a Terra e quello in volo) dovrebbero essere equivalenti. In realtà una differenza c’è. Il gemello rimasto a Terra ha viaggiato nello spazio-tempo in modo uniforme, senza subire accelerazioni particolari. Il gemello sulla nave (pur viaggiando a velocità uniforme a tratti) all’arrivo su Proxima Centauri ha subito delle accelerazioni per poter invertire la sua velocità, questo fatto giustifica la differenza tra i due gemelli al loro incontro.

Gara di sgusci (1)

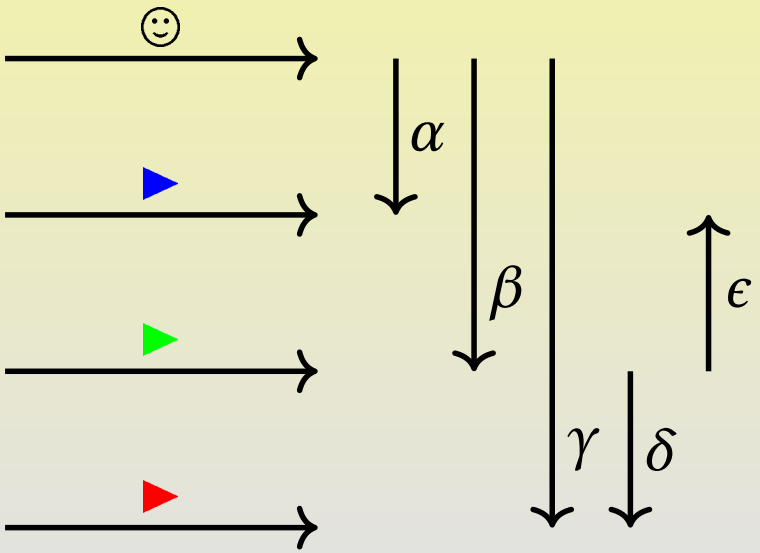
Tre sgusci, uno blu, uno verde e uno rosso stanno gareggiando viaggiando in linea retta su un pianeta dell'Orlo Esterno. Gli spettatori dalla tribuna sono avvisati del fatto che lo sguscio blu viaggia ad una velocità di $0,7c$, quello verde corre a $0,8c$ mentre quello rosso sfreccia a $0,9c$. A che velocità si muovono gli sgusci blu e rosso rispetto al verde?

Gara di sgusci (2)

Gara di sgusci (2)



Gara di sgusci (2)



$$\tanh\alpha = 0,7$$

$$\tanh\beta = 0,8$$

$$\tanh\gamma = 0,9$$

Gara di sgusci (3)

$$\beta + \delta = \gamma \rightarrow \delta = \gamma - \beta \rightarrow$$

$$v_R = c \tanh\left(\tanh^{-1} 0,9 - \tanh^{-1} 0,8\right) = 0,357c$$

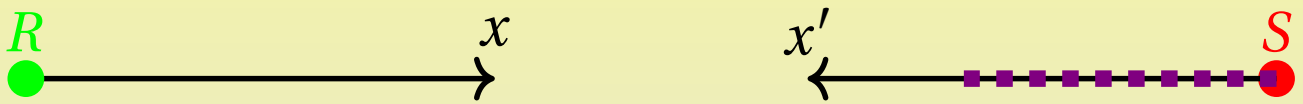
$$\epsilon = \alpha - \beta \rightarrow$$

$$v_B = c \tanh\left(\tanh^{-1} 0,7 - \tanh^{-1} 0,8\right) = -0,227c$$

Segnali dalla sonda (1)

Una sonda lanciata dalla Terra anni fa invia un segnale (un'onda elettromagnetica) ogni secondo sul nostro pianeta. I segnali della sonda si registrano sul nostro pianeta ogni $1,002s$. A quale velocità sta viaggiando la sonda rispetto alla Terra? Sonda e Terra si stanno avvicinando o allontanando?

Segnali dalla sonda (2)

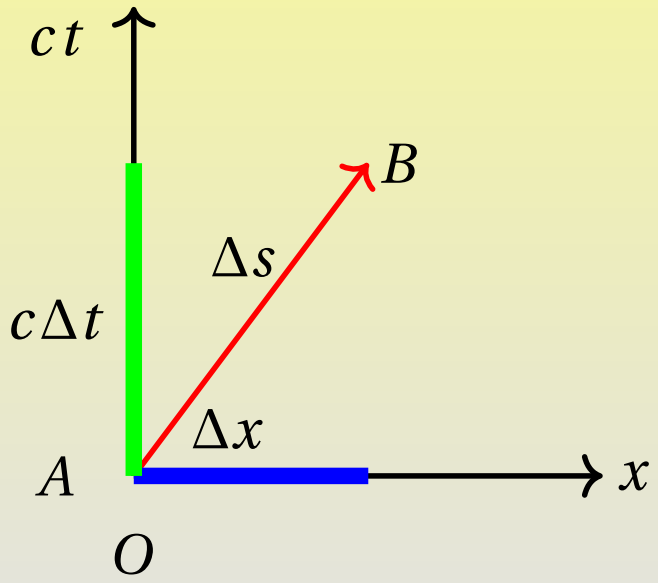


$$v = c\frac{\left(\frac{T_R}{T_S}\right)^2 - 1}{\left(\frac{T_R}{T_S}\right)^2 + 1} = 1,998 \cdot 10^{-3} c$$

La velocità è positiva quindi pianeta e sonda si stanno allontanando.

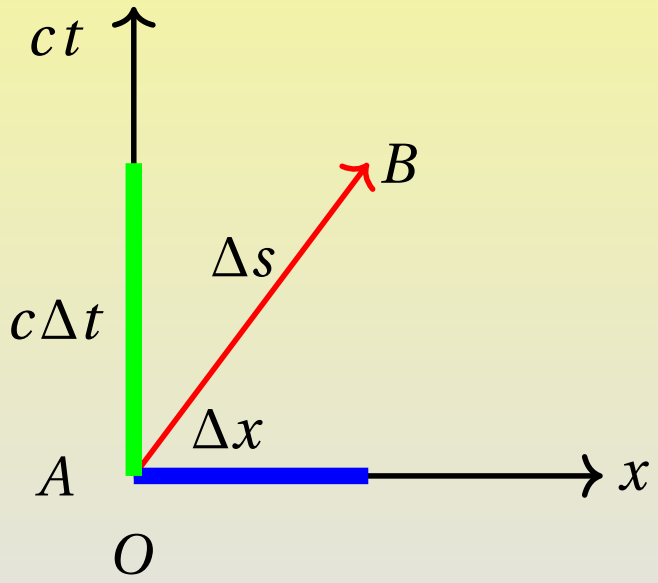
Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.

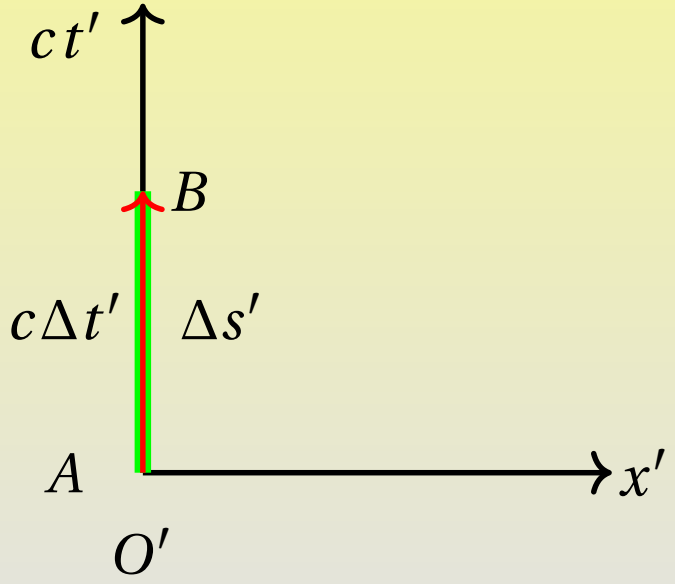


Per l'osservatore O, i due eventi avvengono in tempi e posizioni diverse.

Consideriamo un sistema di riferimento O e uno O' in moto relativo con velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Consideriamo due eventi A, B come da schema.



Per l'osservatore O, i due eventi avvengono in tempi e posizioni diverse.



Per l'osservatore O', i due eventi avvengono nella stessa posizione, in tempi diversi.

Ricordiamo quanto precedentemente ricavato dalla cinematica relativistica:

- Il fattore di Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$

Ricordiamo quanto precedentemente ricavato dalla cinematica relativistica:

- Il fattore di Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$
- $\Delta t = \gamma \Delta t'$

Ricordiamo quanto precedentemente ricavato dalla cinematica relativistica:

- Il fattore di Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$
- $\Delta t = \gamma \Delta t'$
- $\Delta s^2 = \Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2$

Definizione di enermoto

Similmente a quanto fatto in meccanica classica per la quantità di moto definiamo un vettore relativistico detto enermoto.
Per l'osservatore O l'enermoto è:

$$\vec{E} = m\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t'} = \frac{m}{\Delta t'}\begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \gamma\frac{m}{\Delta t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m v \\ \gamma m c \end{pmatrix}$$

Per l'osservatore O' l'enermoto è:

$$\vec{E}' = m\frac{\Delta\vec{s}'}{\Delta t'} = \frac{m}{\Delta t'}\begin{pmatrix} 0 \\ c\Delta t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mc \end{pmatrix}$$

Così definito l'enermoto è un vettore parallelo alla linea universo per tutti e due gli osservatori (esattamente come la quantità di moto classica).

modulo dell'enermoto

Il modulo dell'enermoto è lo stesso per l'osservatore O e O' (per la conservazione dell'intervallo spazio-tempo):

$$\vec{E}^2 = m^2 \frac{\Delta\vec{s}^2}{\Delta t'^2} = m^2 \frac{\Delta\vec{s}'^2}{\Delta t'^2} = \vec{E}'^2$$

Dalla conservazione del modulo dell'enermoto si ottiene l'identità:

$$\vec{E}^2 = \vec{E}'^2 \rightarrow \gamma^2 m^2 \left(c^2 - v^2\right) = m^2 c^2$$

Energia

Si accenna il calcolo del lavoro per portare una particella di massa m da una velocità zero ad una qualche velocità v (l'energia cinetica):

$$L = K = \int_0^v \frac{1}{m}\vec{E}\, d(\vec{E}') = \int_0^v \frac{1}{m}\vec{E}'\, d(\vec{E}) = \gamma m c^2 - m c^2$$

Chiamiamo energia totale, o semplicemente energia:

$$E = \gamma m c^2$$

Chiamiamo energia a riposo la quantità:

$$E_0 = m c^2$$

Confronto tra energia cinetica classica e relativistica

Confronto tra energia cinetica classica e relativistica

Energia cinetica classica:

$$K_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Energia cinetica relativistica:

$$K_R = (\gamma - 1)\, mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) mc^2$$

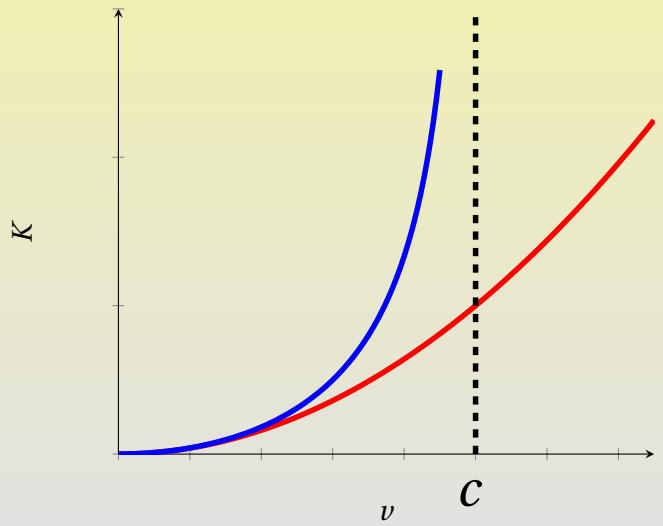
Confronto tra energia cinetica classica e relativistica

Energia cinetica classica:

$$K_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Energia cinetica relativistica:

$$K_R = (\gamma - 1)\, mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) mc^2$$



Confronto tra energia cinetica classica e relativistica per $v \to 0$

$$\lim_{v\to 0}\frac{K_R}{K_C}=\lim_{v\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)mc^2}{\frac{mc^2}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=1$$

- Definiamo la quantità di moto relativistica come $p = \gamma m v$

Ricordando che $\vec{E}^2 = \vec{E}'^2$ si ottiene la relazione relativistica tra energia e quantità di moto:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

- Definiamo la quantità di moto relativistica come $p = \gamma m v$
- Ricordiamo che l'energia relativistica vale $E = \gamma m c^2$

Ricordando che $\vec{E}^2 = \vec{E}'^2$ si ottiene la relazione relativistica tra energia e quantità di moto:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

- Definiamo la quantità di moto relativistica come $p = \gamma m v$
- Ricordiamo che l'energia relativistica vale $E = \gamma m c^2$
- L'enermoto per O è allora $\vec{E} = \begin{pmatrix} \gamma m v \\ \gamma m c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix}$

Ricordando che $\vec{E}^2 = \vec{E}'^2$ si ottiene la relazione relativistica tra energia e quantità di moto:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

- Definiamo la quantità di moto relativistica come $p = \gamma m v$
- Ricordiamo che l'energia relativistica vale $E = \gamma m c^2$
- L'enermoto per O è allora $\vec{E} = \begin{pmatrix} \gamma m v \\ \gamma m c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix}$
- l'enermoto per O' è $\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ mc \end{pmatrix}$

Ricordando che $\vec{E}^2 = \vec{E}'^2$ si ottiene la relazione relativistica tra energia e quantità di moto:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Particelle di massa nulla

La teoria della relatività assegna una quantità di moto anche a particelle di massa nulla.
Dalla conservazione dell'enermoto per $m = 0$ si ottiene:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = 0 \rightarrow p = \frac{E}{c}$$

Non conservazione della massa (1)

Ipotizziamo che due particelle di massa m osservate da un certo osservatore O, viaggino lungo la stessa retta, in versi opposti con velocità entrambe v in modulo. Ipotizziamo che le due particelle si scontrino e si uniscano per formare una sola particella di massa M. Ricaviamo dalla conservazione dell'enermoto la velocità della particella dopo l'urto e la relazione tra m e M.

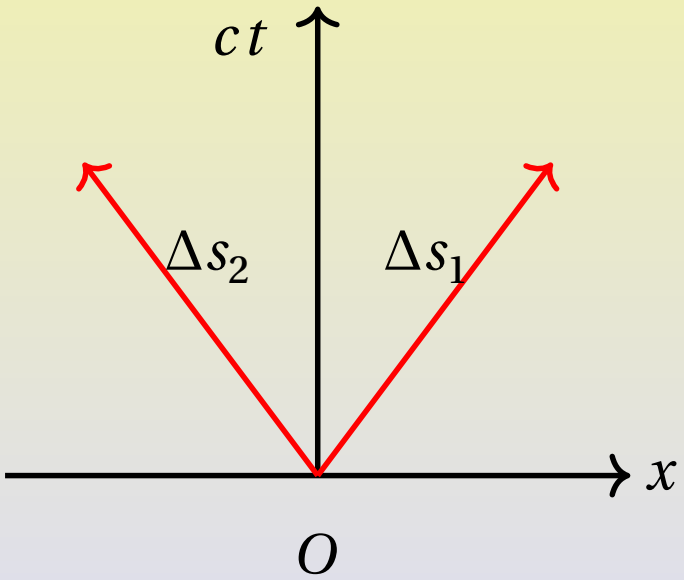
Non conservazione della massa (2)

Modellizziamo la situazione:

Non conservazione della massa (2)

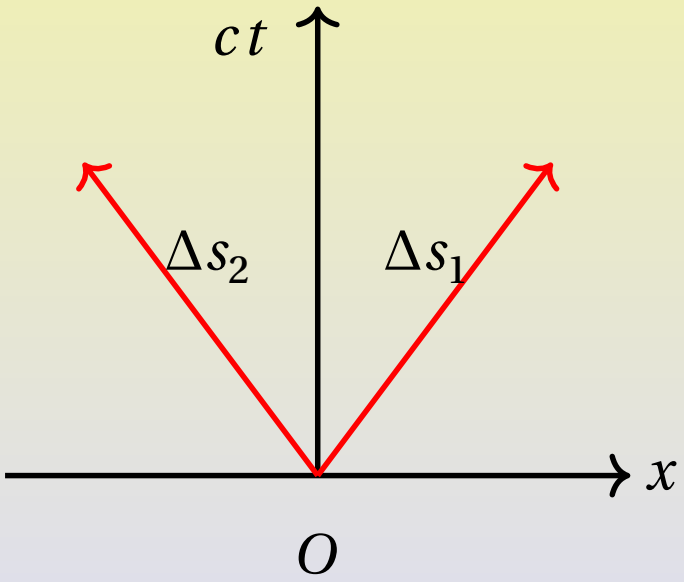
Modellizziamo la situazione:
Prima dell'urto le due particelle

per O:

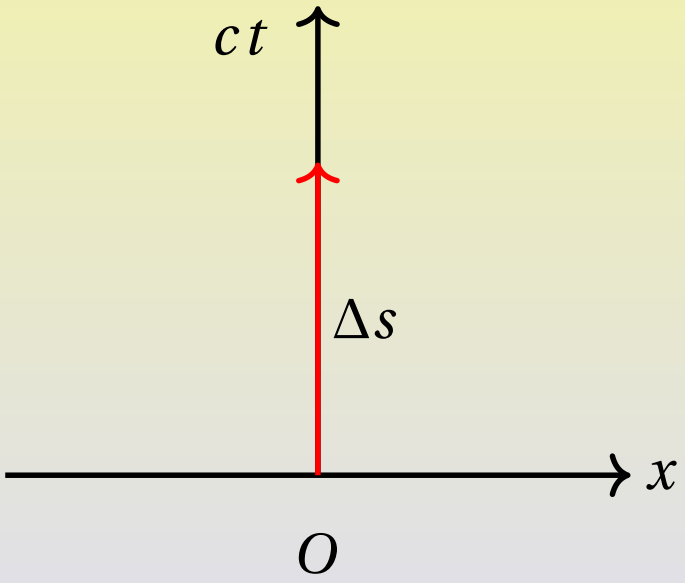


Non conservazione della massa (2)

Modellizziamo la situazione:
Prima dell'urto le due particelle per O:



Dopo l'urto la particella per O:



Non conservazione della massa (3)

Secondo quanto modellizzato si ha:

- $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$, $\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$

Non conservazione della massa (3)

Secondo quanto modellizzato si ha:

- $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$, $\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mv \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$
- $\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} MV \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} Mc \end{pmatrix}$

Non conservazione della massa (4)

Complessivamente quindi:

- $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$

Non conservazione della massa (4)

Complessivamente quindi:

- $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix}$
- $\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} MV \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} Mc \end{pmatrix}$

Non conservazione della massa (5)

Per l'unico osservatore O l'enermoto si conserva (in toto, non solo in modulo), ciò corrisponde alla conservazione della quantità di moto totale e dell'energia totale:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} mc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} MV \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} Mc \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} V = 0 \\ M = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m \end{cases}$$

Non conservazione della massa (6)

Conclusioni:

- $V = 0$ significa che la velocità dell'unica particella dopo l'urto è zero (conservazione della quantità di moto)

Non conservazione della massa (6)

Conclusioni:

- $V = 0$ significa che la velocità dell'unica particella dopo l'urto è zero (conservazione della quantità di moto)
- $M = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m \geq 2m$ (conservazione dell'energia)

Non conservazione della massa (6)

Conclusioni:

- $V = 0$ significa che la velocità dell'unica particella dopo l'urto è zero (conservazione della quantità di moto)
- $M = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m \geq 2m$ (conservazione dell'energia)
- l'energia cinetica persa durante l'urto si è convertita in nuova massa

"...Le particelle elementari, protoni, neutroni, elettroni, ecc. hanno ciascuna una massa ben definita. La massa è con la carica elettrica una delle grandezze fondamentali delle particelle elementari. Esistono particelle, come il fotone, che hanno massa nulla. Per queste l'espressione $p = \gamma m v$ non ha senso. [...] Anche i sistemi composti, come i nuclei, gli atomi, le molecole e gli oggetti macroscopici hanno ciascuno una massa. [...] In molti libri si trova usato il concetto di massa relativistica. Con questo nome gli autori intendono il prodotto della massa m con il fattore relativistico γ."

"Con questa definizione la quantità di moto torna ad essere il prodotto della massa (relativistica) per la velocità. Naturalmente adesso la massa (relativistica) diventa funzione della velocità. Questo concetto fu introdotto da Lorentz nel 1899, sei anni prima della creazione della teoria della relatività, in un momento in cui la teoria era ancora confusa. È un concetto arcaico quindi, che non ha utilità alcuna. Rimane tuttavia presente in molte trattazioni anche contemporanee. Noi non lo utilizzeremo mai. Quando parleremo di massa intenderemo la costante m che compare nella $p = \gamma m v$."

Alessandro Bettini - Meccanica e Termodinamica, Zanichelli, 2000

Un po' di cronistoria:

- 1896: viene scoperto il fenomeno della radioattività, consistente nell'emissione di particelle e/o radiazione da nuclei atomici instabili

Un po' di cronistoria:

- 1896: viene scoperto il fenomeno della radioattività, consistente nell'emissione di particelle e/o radiazione da nuclei atomici instabili
- 1897: Thomson scopre l'elettrone come costituente dei raggi catodici e Lorentz mette a punto una teoria che descrive il comportamento dell'elettrone in un campo magnetico

- 1905-1907: gli studi teorici di Maxwell, Boltzmann, Bose, Fermi, Einstein e Dirac e le misure sperimentali sul moto Browniano (moto casuale delle particelle di gas) confermano la struttura molecolare della materia e conducono ad una precisa determinazione del numero di Avogadro

Atomi e Quanti

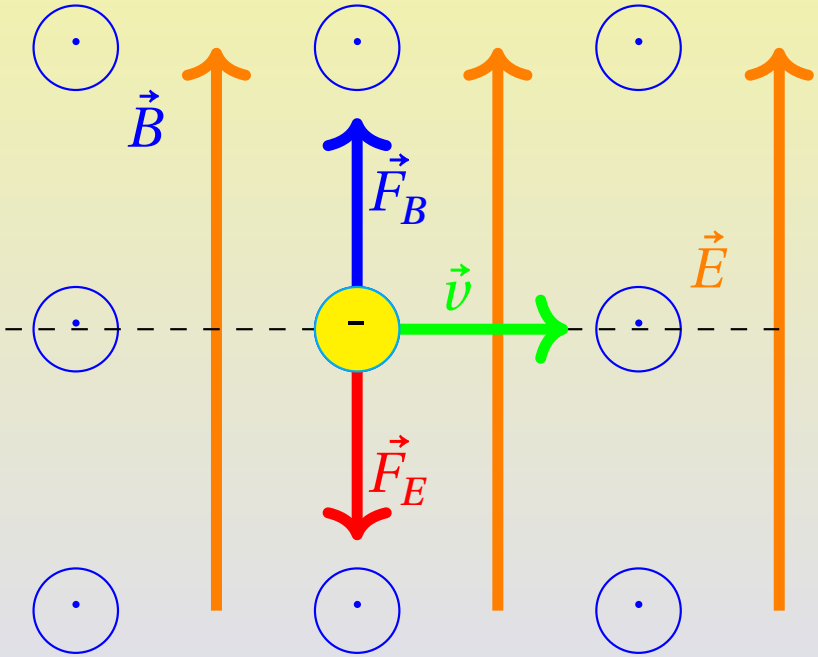
- 1905-1907: gli studi teorici di Maxwell, Boltzmann, Bose, Fermi, Einstein e Dirac e le misure sperimentali sul moto Browniano (moto casuale delle particelle di gas) confermano la struttura molecolare della materia e conducono ad una precisa determinazione del numero di Avogadro
- 1910: Millikan determina la carica dell'elettrone

Atomi e Quanti

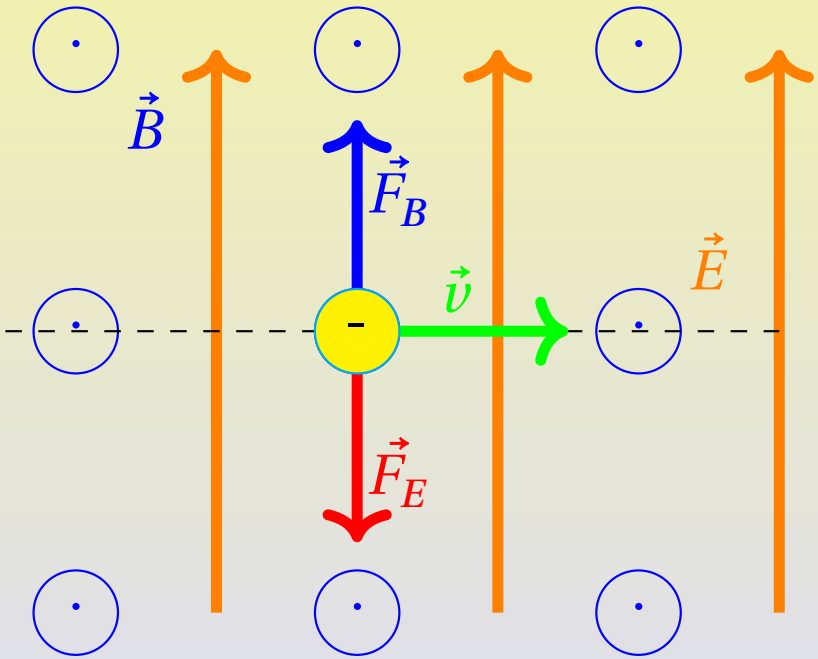
- 1905-1907: gli studi teorici di Maxwell, Boltzmann, Bose, Fermi, Einstein e Dirac e le misure sperimentali sul moto Browniano (moto casuale delle particelle di gas) confermano la struttura molecolare della materia e conducono ad una precisa determinazione del numero di Avogadro
- 1910: Millikan determina la carica dell'elettrone
- 1911: Rutherford bombarda diversi materiali con raggi α e ipotizza un modello atomico di tipo planetario

Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte prima: selettore di velocità

Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte prima: selettore di velocità



Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte prima: selettore di velocità



Gli elettroni estratti e accelerati passano attraverso un campo elettro-magnetico fino ad ottenere per loro una traiettoria rettilinea:

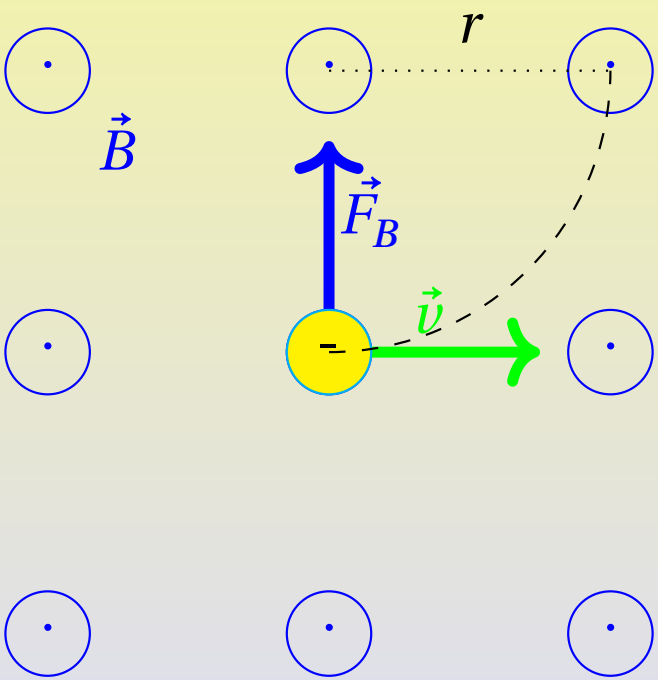
$$F_B = F_E$$

$$|q|\, vB = |q|\, E$$

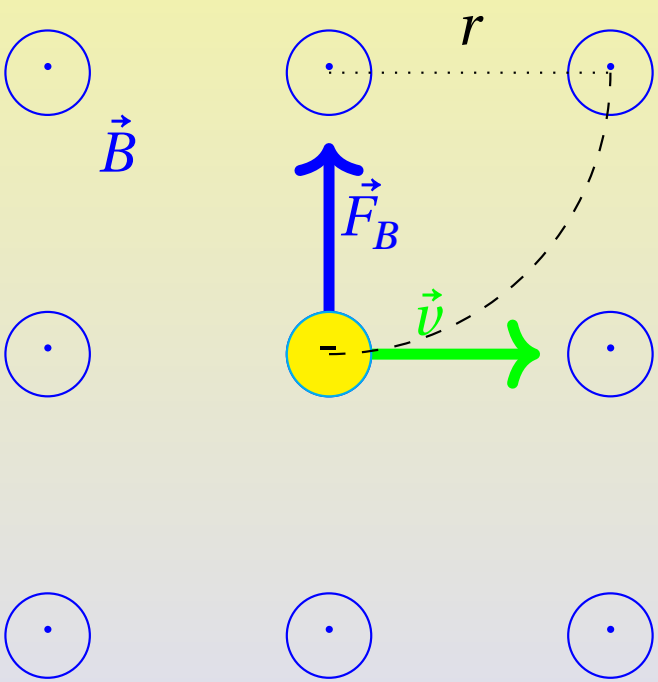
$$v = \frac{E}{B}$$

Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte seconda: spettrometro di massa

Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte seconda: spettrometro di massa



Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte seconda: spettrometro di massa



Gli elettroni passano attraverso lo stesso campo magnetico precedente, senza campo elettrico:

$$F_B = m\frac{v^2}{r}$$

$$|q|\,vB = m\frac{v^2}{r}$$

...

Esperimento di Thomson (modello semplificato)
Parte seconda: spettrometro di massa

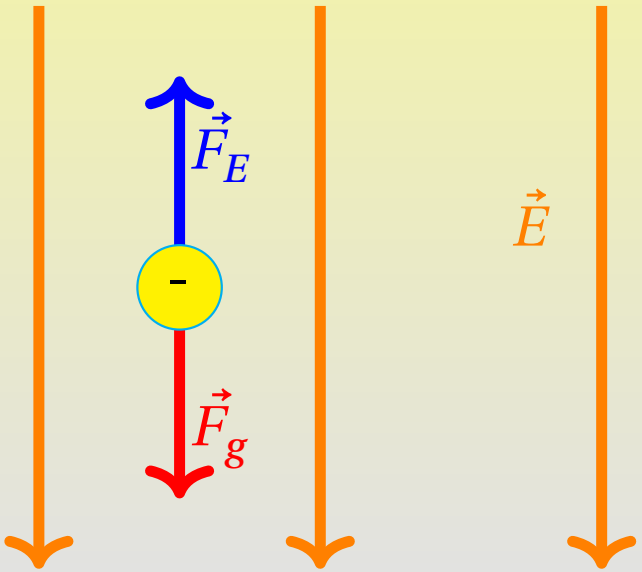
$$|q|\,vB = m\frac{v^2}{r}$$

ricordando che nella prima parte dell'esperimento abbiamo ottenuto $v = \frac{E}{B}$:

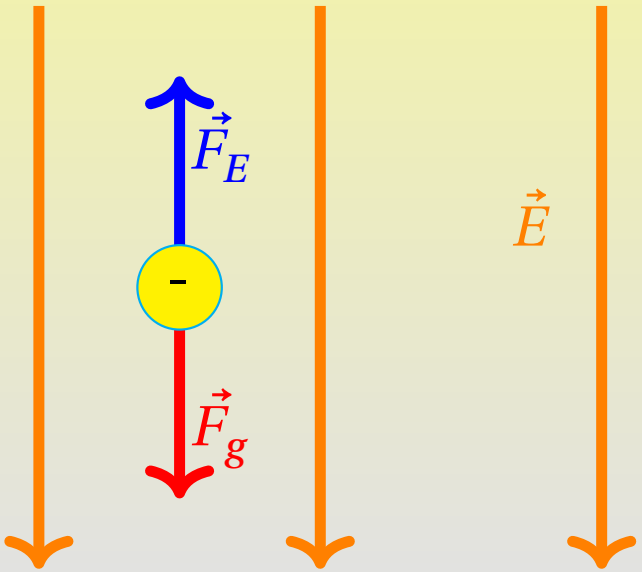
$$|q|\,E = m\frac{E^2}{B^2 r} \rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{E}{B^2 r} = 1,76 \cdot 10^{11}\,\frac{C}{kg}$$

Esperimento di Millikan (modello semplificato)

Esperimento di Millikan (modello semplificato)



Esperimento di Millikan (modello semplificato)



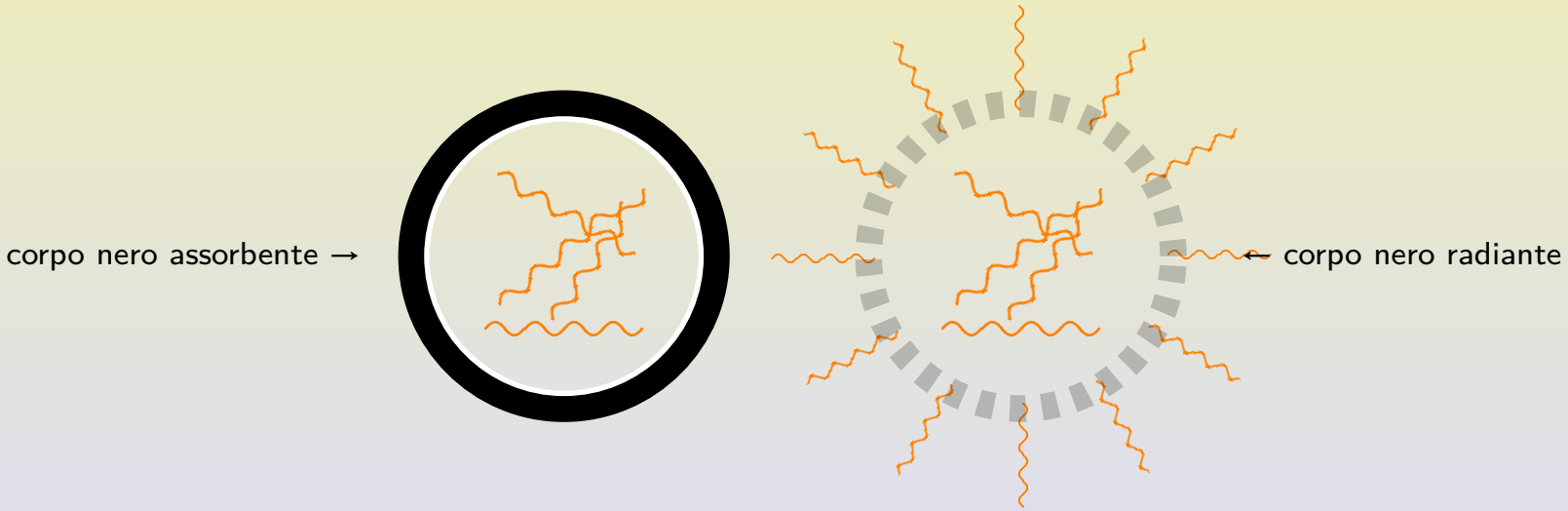
Gocce d'olio cariche di massa nota m vengono tenute in equilibrio con la forza di gravità tramite l'applicazione di un campo elettrico:

$$F_g = F_E$$

$$mg = |q|E$$

$$|q| = \frac{mg}{E} = 1,60 \cdot 10^{-19} C$$

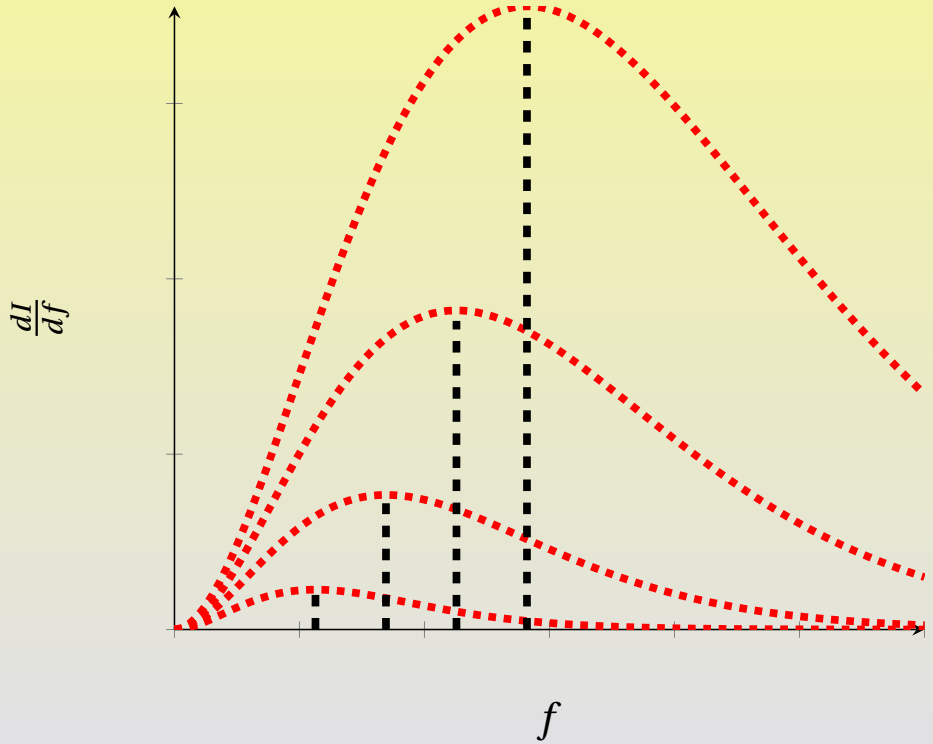
Un corpo nero è un oggetto ideale che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente senza rifletterla all'esterno. Può essere modellizzato come una cavità con pareti interne riflettenti. Il corpo nero assorbe le radiazioni ma se aprissimo la cavità le radiazioni intrappolate inizierebbero ad irradiarsi presentando le medesime caratteristiche delle radiazioni intrappolate all'interno della cavità.



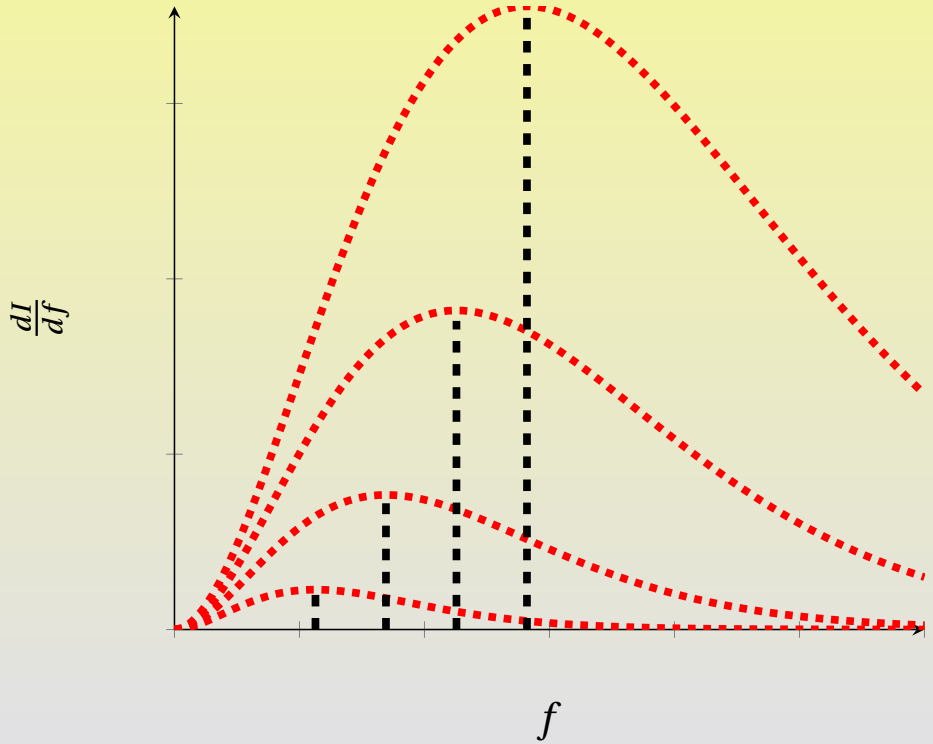
Una buona approssimazione sperimentale di un corpo nero è una sfera metallica incandescente; della sfera è possibile registrare emissioni elettromagnetiche in funzione della temperatura. Anche le stelle e le lampadine ad incandescenza sono in buona approssimazione un corpo nero radiante. Ciò di cui ci occuperemo sarà lo studio dello spettro di un corpo nero, cioè lo studio delle caratteristiche delle radiazioni emesse da un corpo nero. Il modello della cavità è utilizzato per poter dedurre in modo teorico le leggi che descrivono le caratteristiche delle radiazioni del corpo nero.

Fenomeni e risultati sperimentali

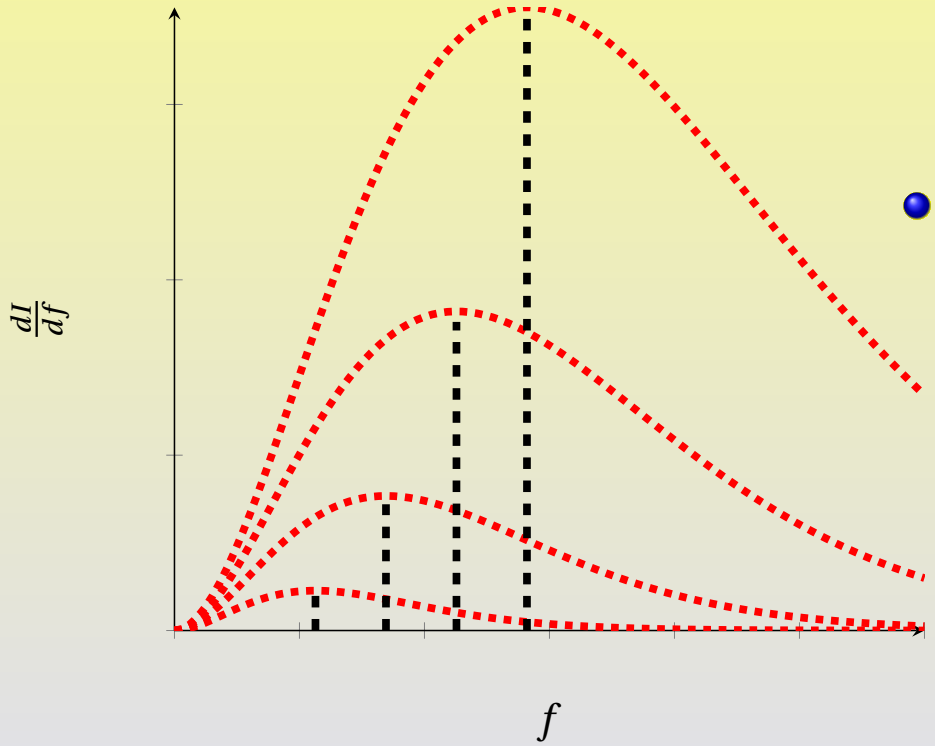
Fenomeni e risultati sperimentali



Fenomeni e risultati sperimentali

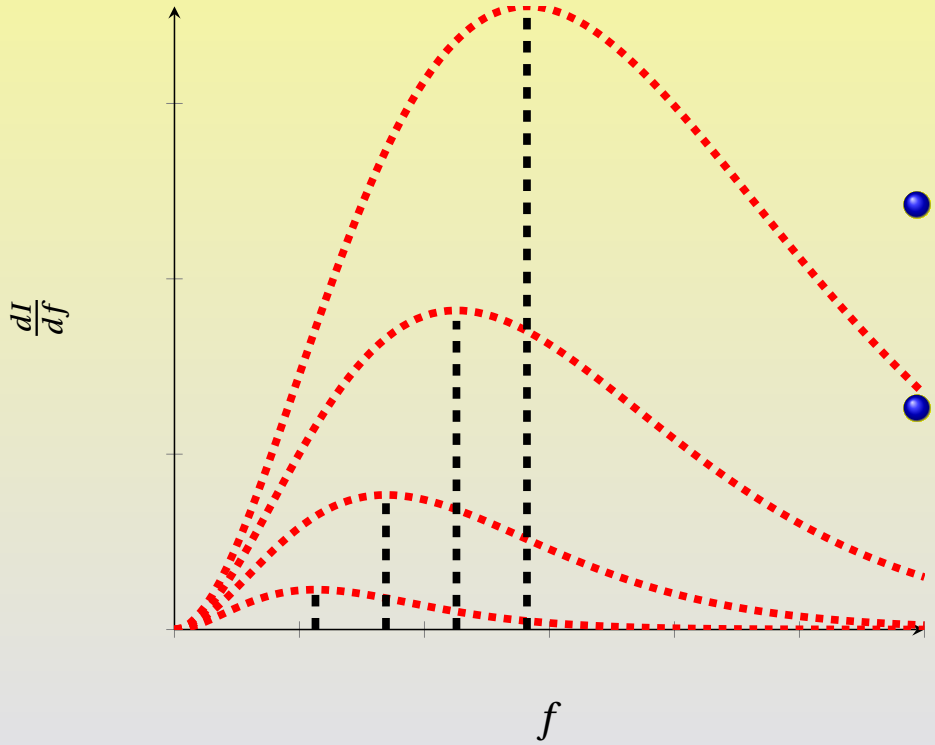


Fenomeni e risultati sperimentali



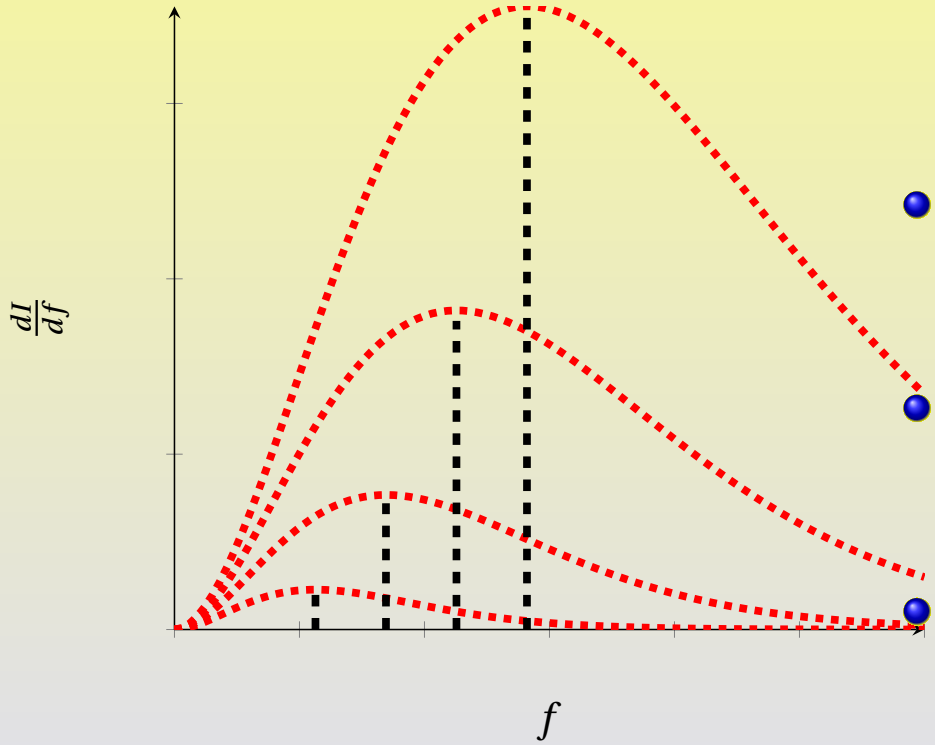
- lo spettro di emissione delle frequenze del corpo nero varia al variare della temperatura

Fenomeni e risultati sperimentali



- lo spettro di emissione delle frequenze del corpo nero varia al variare della temperatura
- legge di Wien: il massimo dell'intensità di emissione si ha per $f = 5,88 \cdot 10^{10} s^{-1} K^{-1} T$

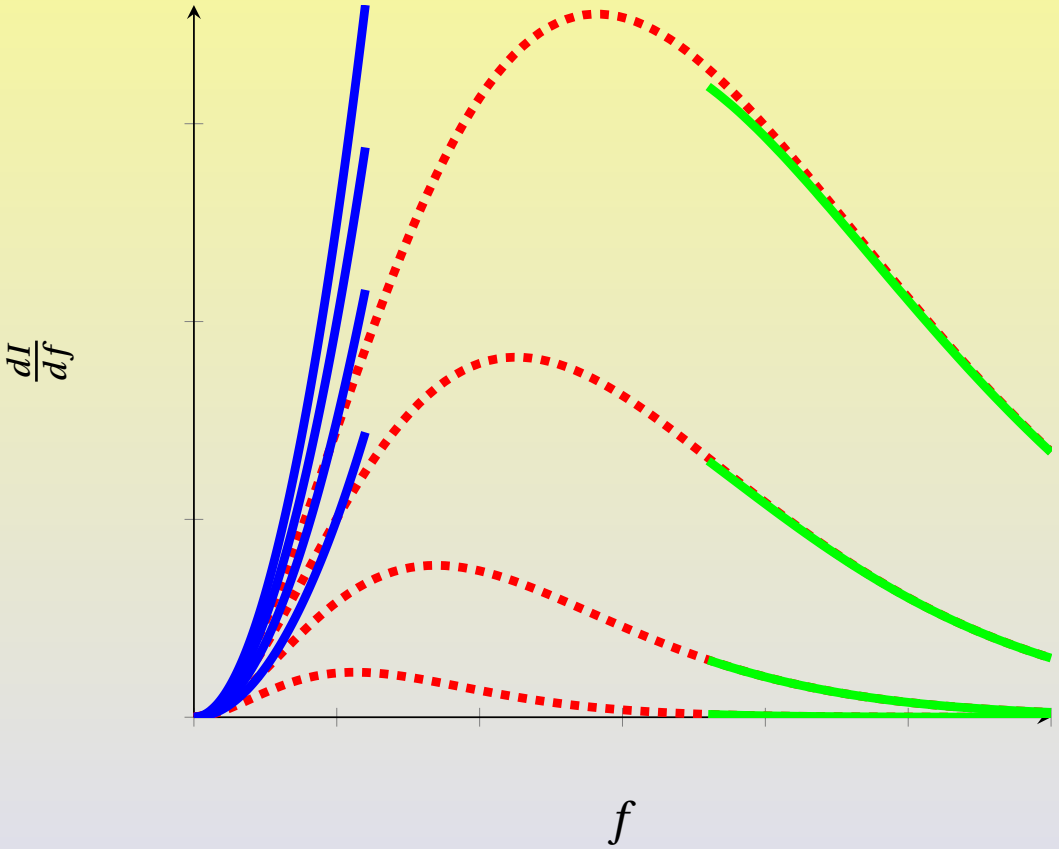
Fenomeni e risultati sperimentali



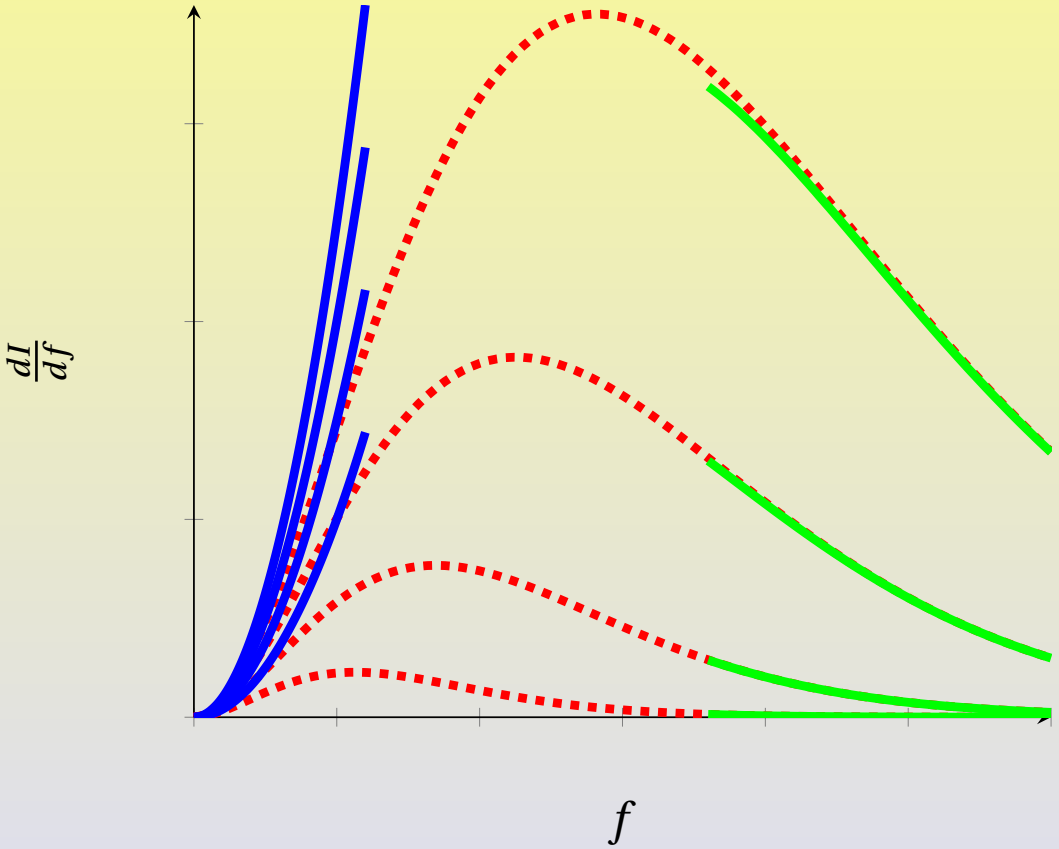
- lo spettro di emissione delle frequenze del corpo nero varia al variare della temperatura
- legge di Wien: il massimo dell'intensità di emissione si ha per $f = 5,88 \cdot 10^{10} s^{-1} K^{-1} T$
- legge di Stefan - Boltzmann: $I_{tot} = \sigma T^4$

Previsioni fisica classica

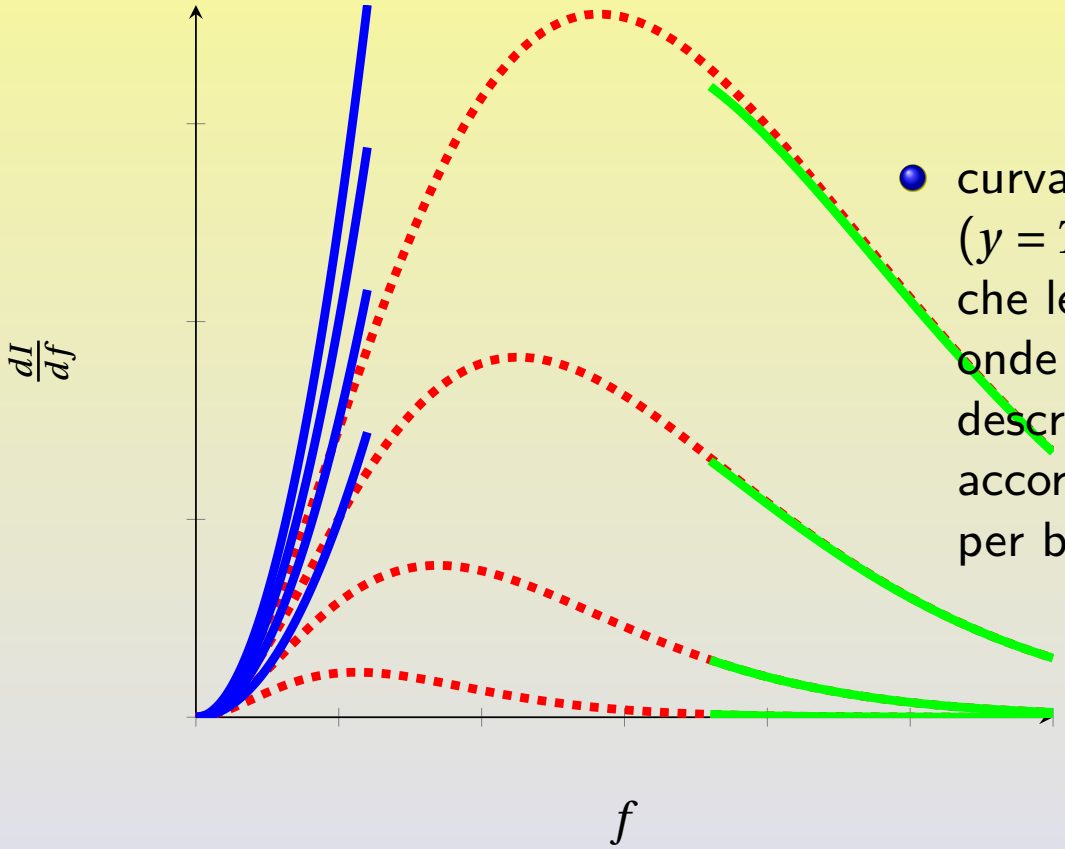
Previsioni fisica classica



Previsioni fisica classica

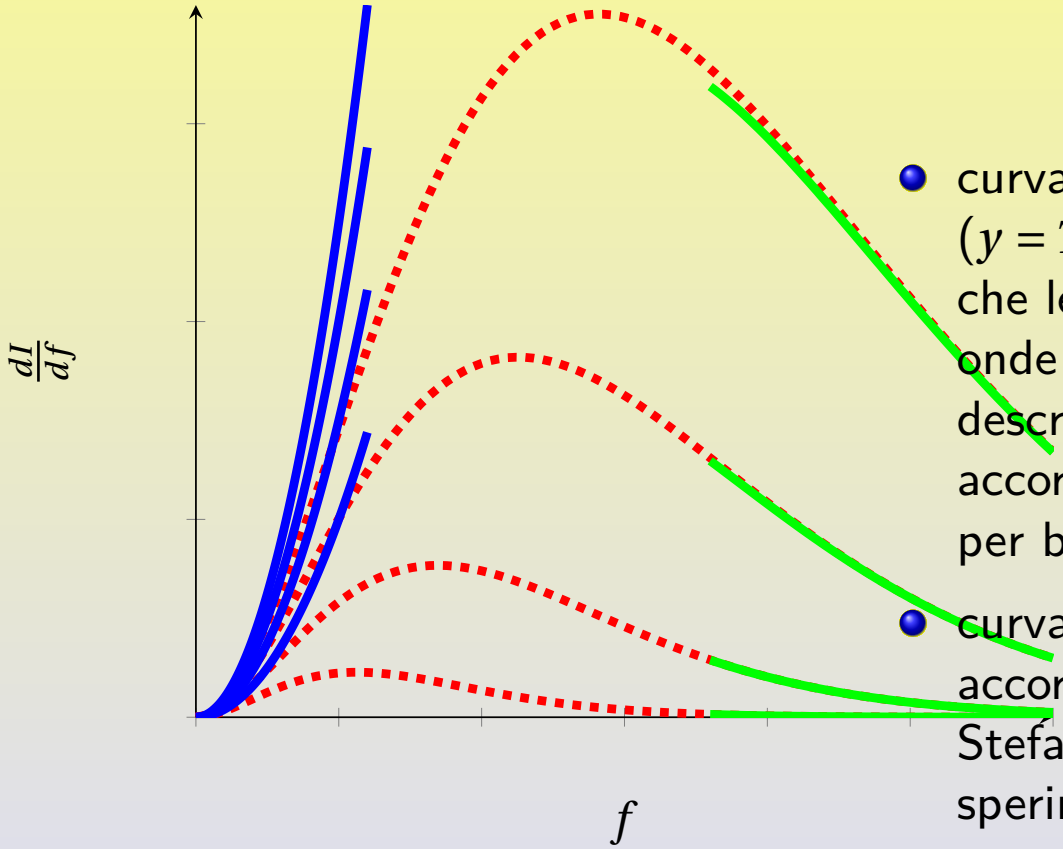


Previsioni fisica classica



- curva di Rayleigh–Jeans ($y = Tx^2$): derivata dall'ipotesi che le radiazioni nella cavità siano onde elettro-magnetiche come descritte dalle leggi di Maxwell, in accordo con i dati sperimentali per basse frequenze

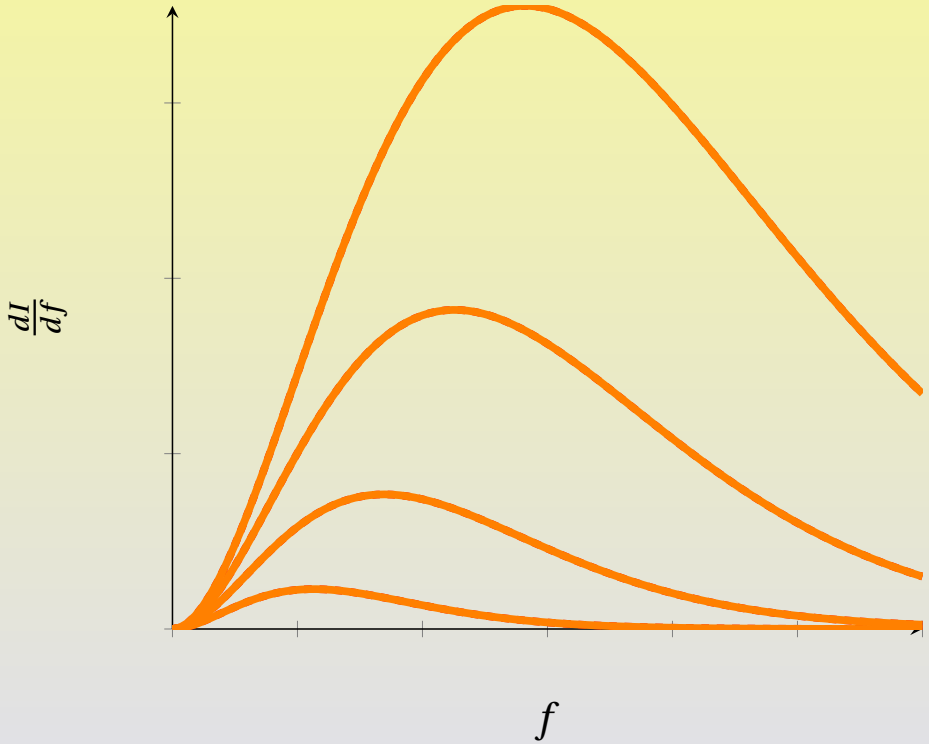
Previsioni fisica classica



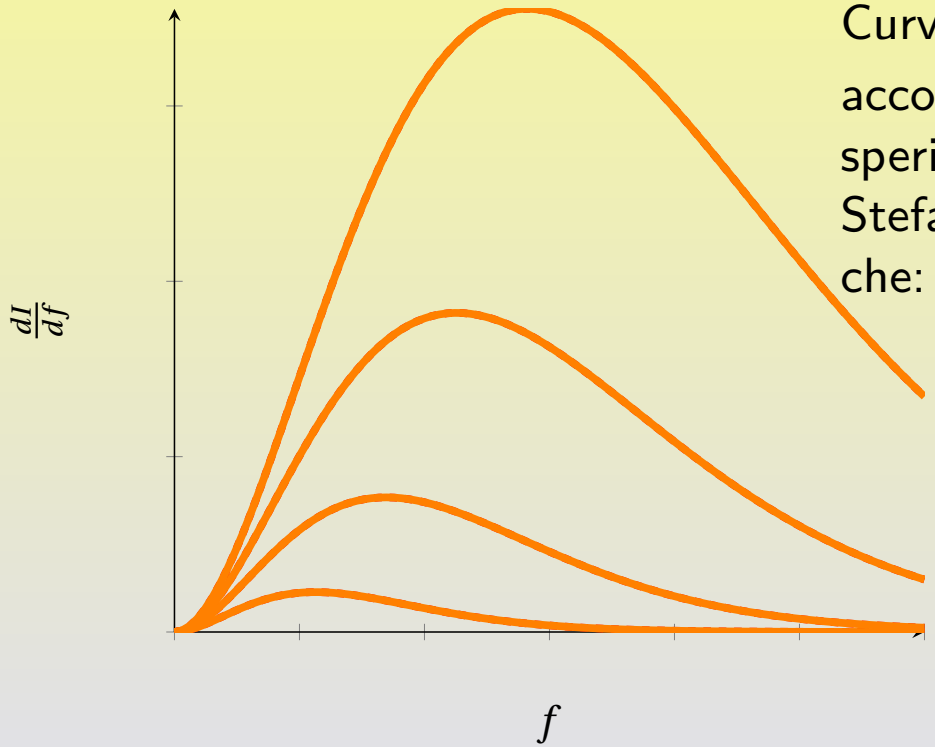
- curva di Rayleigh–Jeans ($y = Tx^2$): derivata dall'ipotesi che le radiazioni nella cavità siano onde elettro-magnetiche come descritte dalle leggi di Maxwell, in accordo con i dati sperimentali per basse frequenze
- curva di Wien ($y = x^3 e^{-\frac{x}{T}}$): in accordo con legge di Stefan-Boltzmann e con i dati sperimentali alle alte frequenze

Spiegazione di Planck

Spiegazione di Planck

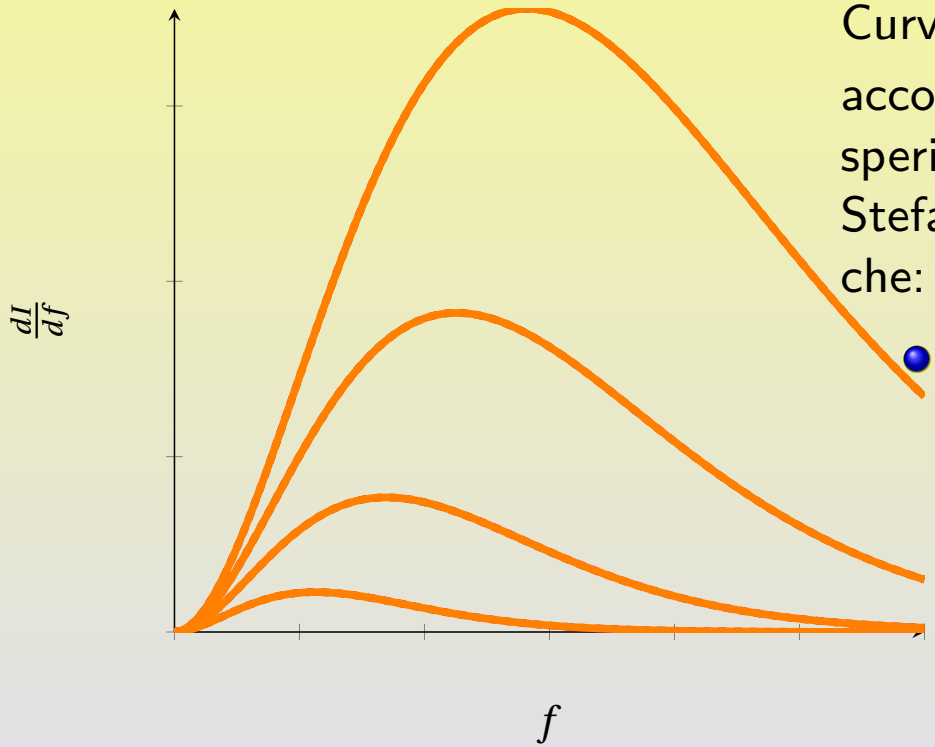


Spiegazione di Planck



Curva di Planck ($y = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$) in pieno accordo con i dati e le leggi sperimentali di Wien e Stefan-Boltzmann. Derivata dall'ipotesi che:

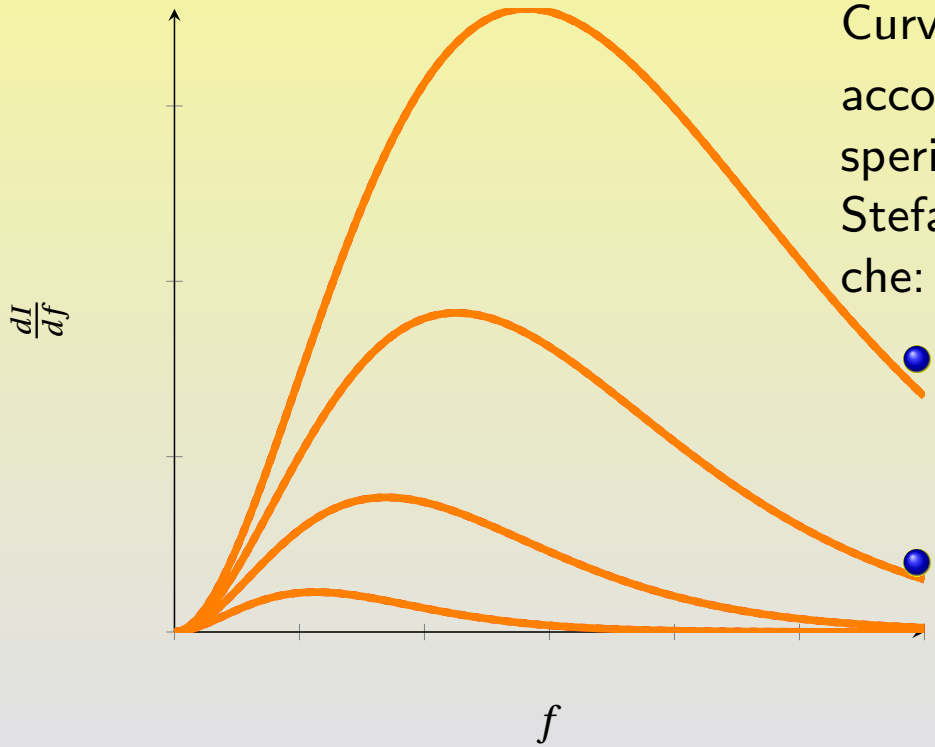
Spiegazione di Planck



Curva di Planck ($y = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$) in pieno accordo con i dati e le leggi sperimentali di Wien e Stefan-Boltzmann. Derivata dall'ipotesi che:

- le radiazioni nella cavità si comportino come particelle (fotoni) tra loro indistinguibili

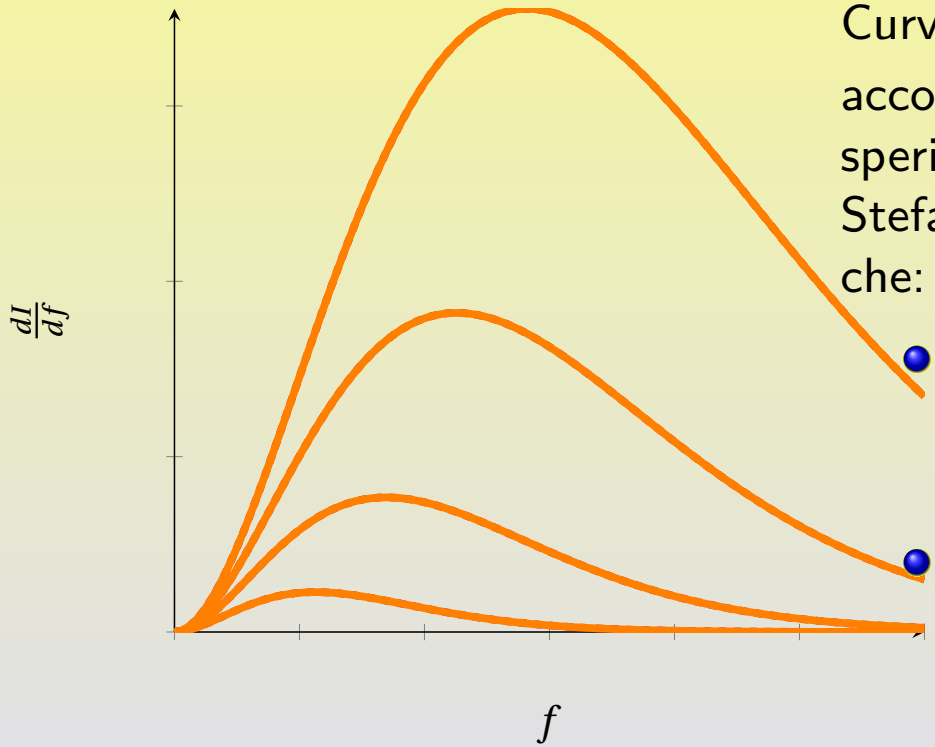
Spiegazione di Planck



Curva di Planck ($y = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$) in pieno accordo con i dati e le leggi sperimentali di Wien e Stefan-Boltzmann. Derivata dall'ipotesi che:

- le radiazioni nella cavità si comportino come particelle (fotoni) tra loro indistinguibili
- i fotoni possano assumere livelli energetici numerabili all'interno della cavità

Spiegazione di Planck



Curva di Planck ($y = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$) in pieno accordo con i dati e le leggi sperimentali di Wien e Stefan-Boltzmann. Derivata dall'ipotesi che:

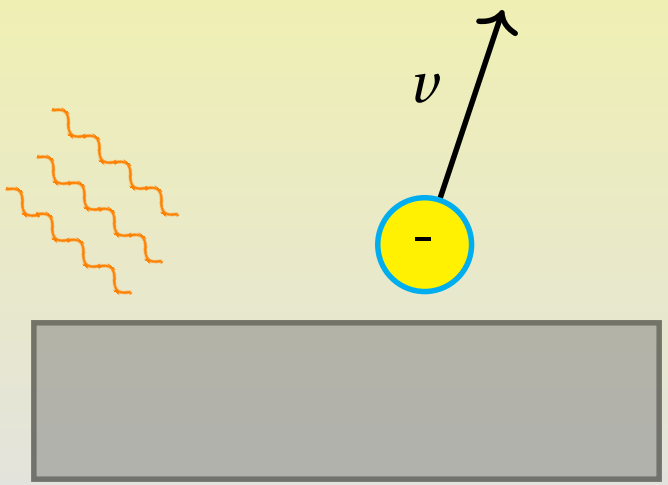
- le radiazioni nella cavità si comportino come particelle (fotoni) tra loro indistinguibili
- i fotoni possano assumere livelli energetici numerabili all'interno della cavità
- l'energia di un fotone (quanto) sia pari a $E = hf$

Da quanto ipotizzato per spiegare la radiazione da corpo nero la radiazione elettromagnetica ha anche caratteristiche corpuscolari, i corpuscoli legati alle onde elettromagnetiche, i fotoni hanno massa nulla e energia dipendente dalla frequenza $E = hf$. Utilizzano anche quanto previsto dalla teoria della relatività per la quantità di moto delle particelle di massa nulla si ha che la quantità di moto di un fotone vale:

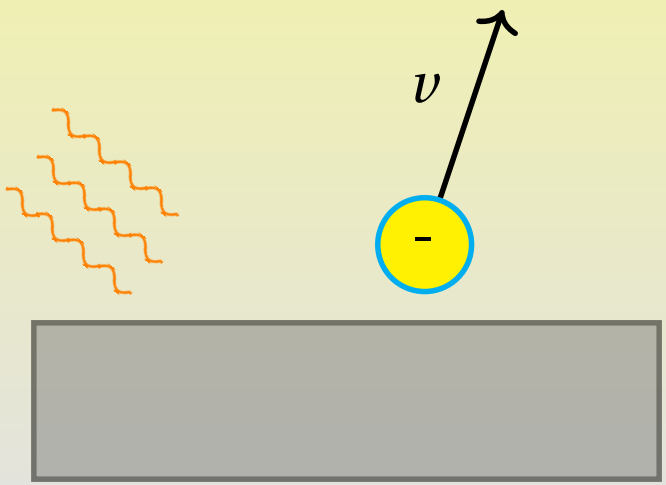
$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Fenomeni e risultati sperimentali

Fenomeni e risultati sperimentali

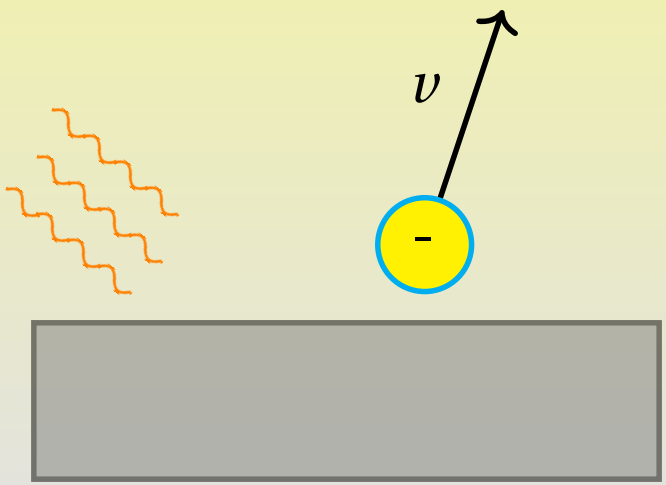


Fenomeni e risultati sperimentali



Radiazioni elettromagnetiche che incidono su una lastra di metallo consentono estrazione di elettroni dalla lastra:

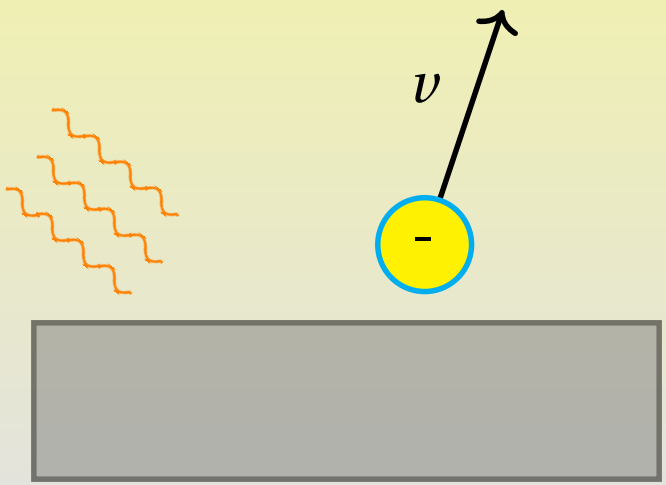
Fenomeni e risultati sperimentali



Radiazioni elettromagnetiche che incidono su una lastra di metallo consentono estrazione di elettroni dalla lastra:

- l'estrazione degli elettroni avviene solo se la lastra viene colpita con radiazioni di frequenza superiore ad una certa frequenza (f_0) dipendente dal materiale di cui è fatta la lastra

Fenomeni e risultati sperimentali



Radiazioni elettromagnetiche che incidono su una lastra di metallo consentono estrazione di elettroni dalla lastra:

- l'estrazione degli elettroni avviene solo se la lastra viene colpita con radiazioni di frequenza superiore ad una certa frequenza (f_0) dipendente dal materiale di cui è fatta la lastra
- l'estrazione, se avviene, è istantanea

Previsioni fisica classica

- l'estrazione degli elettroni dovrebbe essere possibile con qualsiasi tipo di radiazione purché sia sufficientemente intenso

Previsioni fisica classica

- l'estrazione degli elettroni dovrebbe essere possibile con qualsiasi tipo di radiazione purché sia sufficientemente intenso
- l'estrazione degli elettroni è prevista con un certo ritardo temporale rispetto all'inizio dell'irradiazione della lastra soprattutto per radiazioni a bassa intensità

Previsioni fisica classica

- l'estrazione degli elettroni dovrebbe essere possibile con qualsiasi tipo di radiazione purché sia sufficientemente intenso
- l'estrazione degli elettroni è prevista con un certo ritardo temporale rispetto all'inizio dell'irradiazione della lastra soprattutto per radiazioni a bassa intensità
- l'energia cinetica degli elettroni estratti dovrebbe aumentare con l'aumentare dell'intensità della radiazione incidente

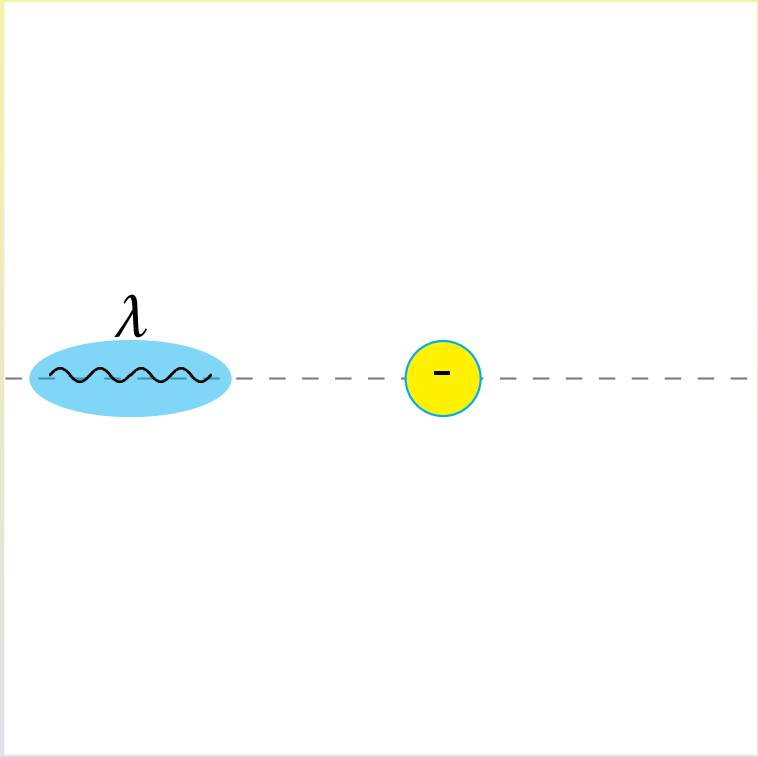
Spiegazione di Einstein

L'energia della radiazione incidente (considerata come fotoni) hf va in parte in energia cinetica dell'elettrone estratto (K_e) e in parte in lavoro di estrazione dell'elettrone dal metallo (L). Se tutta l'energia dei fotoni incidenti viene utilizzata per l'espulsione degli elettroni essi vengono espulsi con energia cinetica massima $(K_{e\ MAX})$, in questo caso:

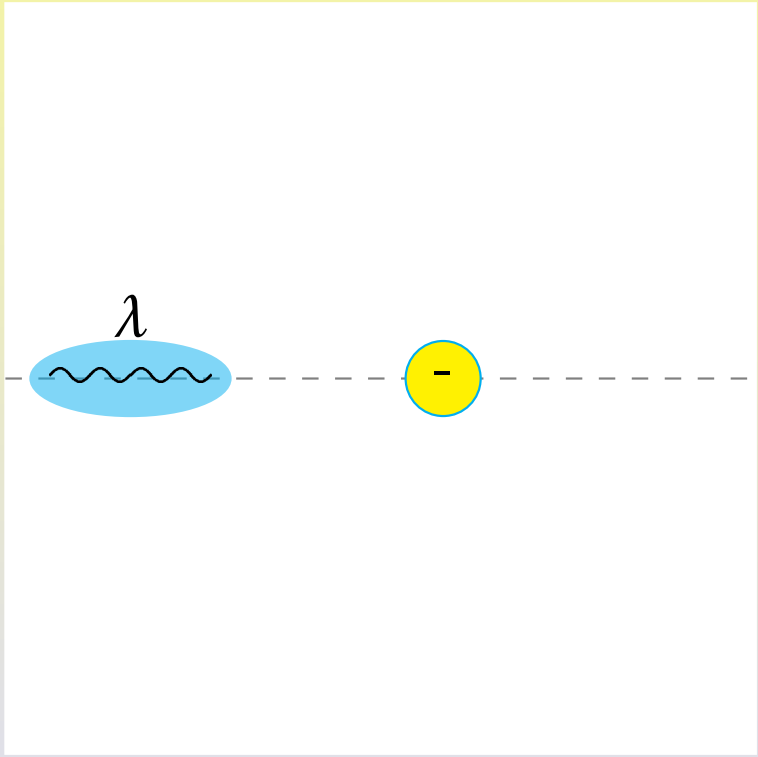
$$K_{e\ MAX} = hf - L \geq 0 \rightarrow f \geq \frac{L}{h} = f_0$$

Fenomeni e risultati sperimentali

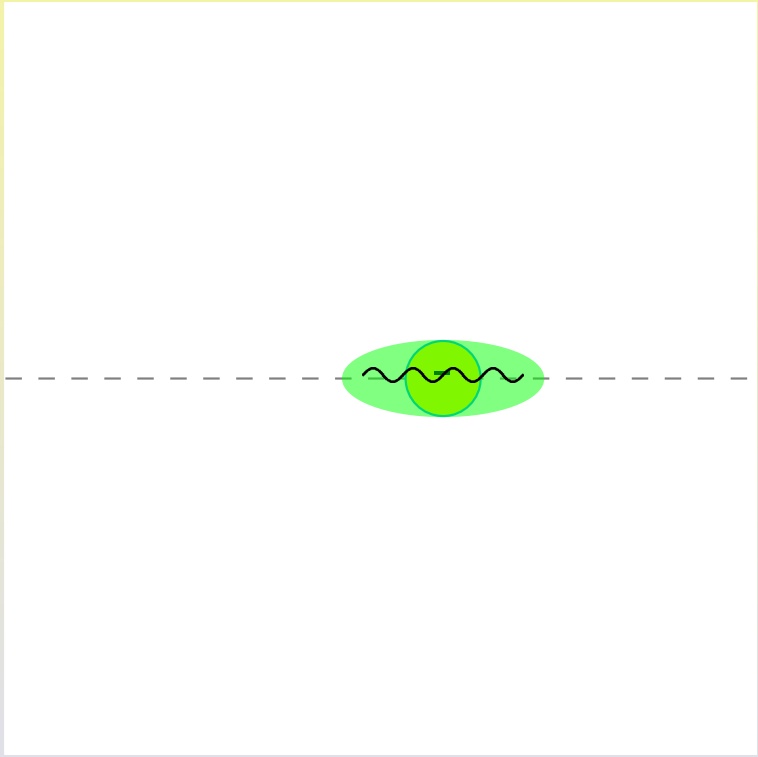
Fenomeni e risultati sperimentali



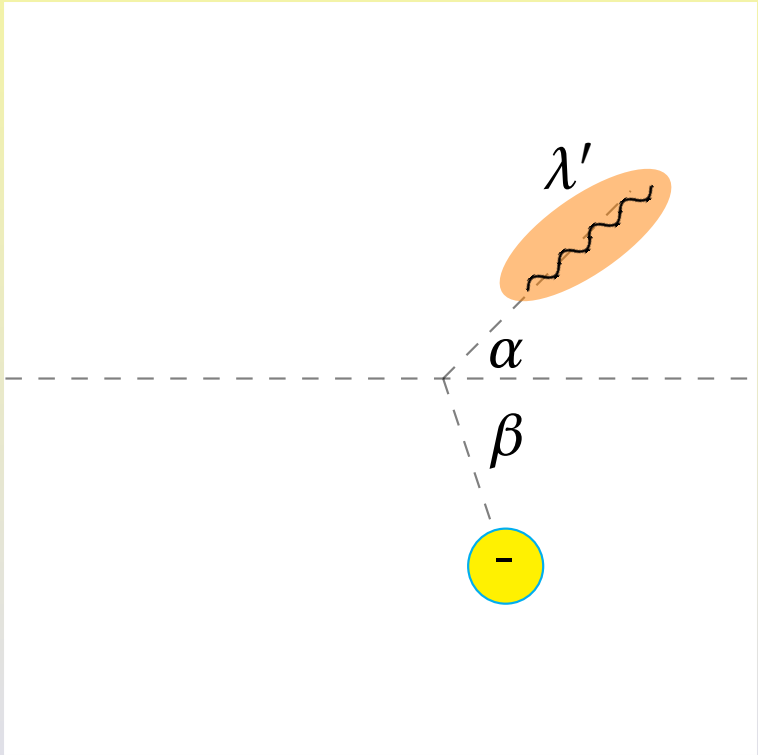
Fenomeni e risultati sperimentali



Fenomeni e risultati sperimentali



Fenomeni e risultati sperimentali



Raggi X di lunghezza d'onda λ interagendo con elettroni liberi vengono diffusi e la loro lunghezza d'onda varia secondo la legge sperimentale:

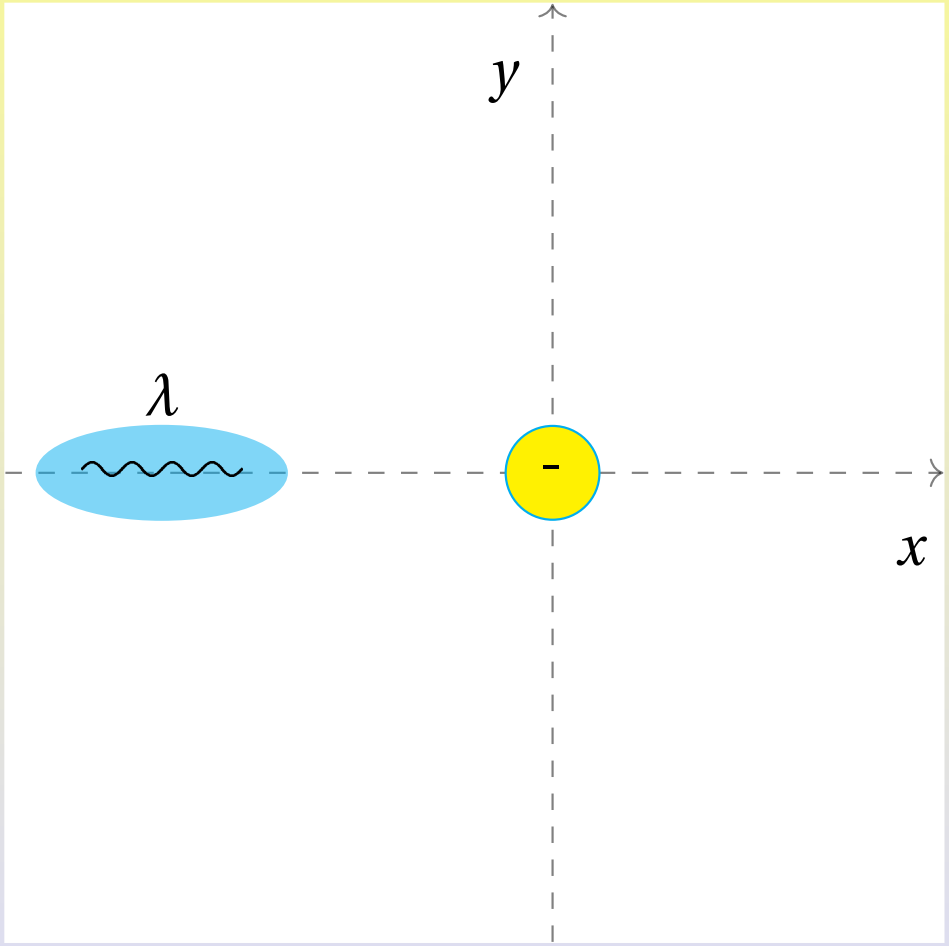
$$\lambda' - \lambda = k\,(1 - \cos(\alpha))$$

con $k = 2,43 \cdot 10^{-12} m$.

Previsioni fisica classica

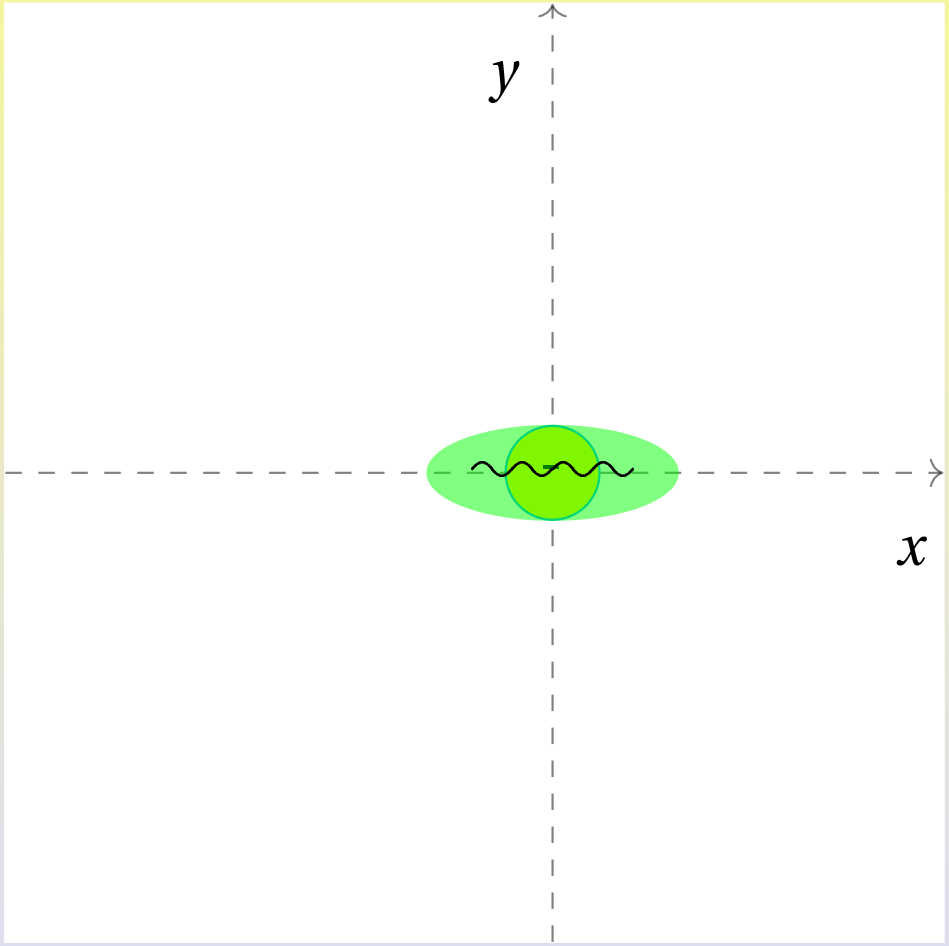
L'interazione tra le onde elettromagnetiche e particelle come gli elettroni secondo quanto previsto dalla fisica classica dovrebbe dar luogo ad un assorbimento delle onde elettromagnetiche e ad una loro successiva remissione con la medesima frequenza di assorbimento nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è a riposo. L'onda dovrebbe presentare una lunghezza d'onda di poco diversa nel sistema del laboratorio come previsto dall'effetto Doppler. Queste previsioni non spiegano i risultati sperimentali.

Spiegazione con conservazione enermoto



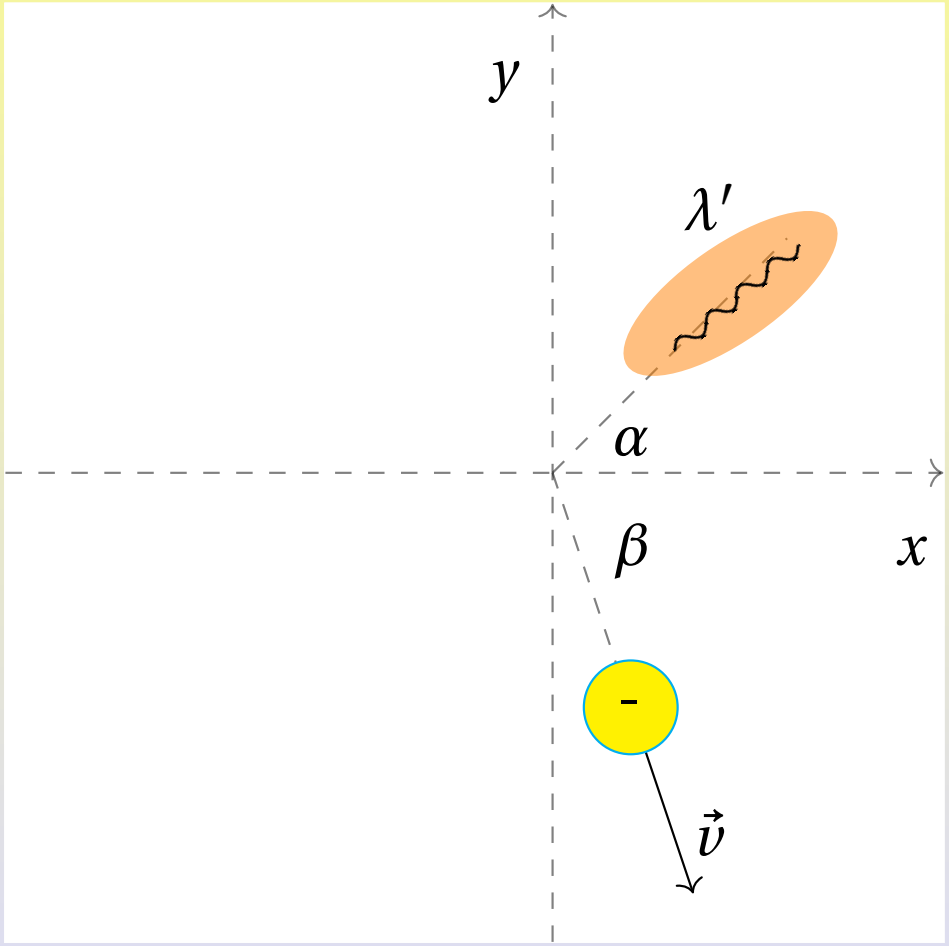
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{hf}{c} \\ 0 \\ \frac{hf}{c} + m_e c \end{pmatrix}$$

Spiegazione con conservazione enermoto



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{hf}{c} \\ 0 \\ \frac{hf}{c} + m_e c \end{pmatrix}$$

Spiegazione con conservazione enermoto



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{hf}{c} \\ 0 \\ \frac{hf}{c} + m_e c \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} \frac{hf'}{c}\cos(\alpha) + \gamma m_e v \cos(\beta) \\ \frac{hf'}{c}\sin(\alpha) - \gamma m_e v \sin(\beta) \\ \frac{hf'}{c} + \gamma m_e c \end{pmatrix}$$

Spiegazione con conservazione enermoto

Dalla conservazione dell'enermoto si ricavano le equazioni:

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c}\cos(\alpha) + \gamma m_e v \cos(\beta) \tag{1}$$

$$0 = \frac{hf'}{c}\sin(\alpha) - \gamma m_e v \sin(\beta) \tag{2}$$

$$\frac{hf}{c} + m_e c = \frac{hf'}{c} + \gamma m_e c \tag{3}$$

Spiegazione con conservazione enermoto

Dalla equazione 1 (equivalente alla conservazione della quantità di moto lungo x) si può ricavare:

$$\gamma m_e v \cos(\beta) = \frac{h}{c}\left(f - f' \cos(\alpha)\right) \tag{4}$$

dalla equazione 2 (equivalente alla conservazione della quantità di moto lungo y) si può ricavare:

$$\gamma m_e v \sin(\beta) = \frac{h f'}{c} \sin(\alpha) \tag{5}$$

Spiegazione con conservazione enermoto

Ricordando che $\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$ dalle equazioni 4 e 5 si può ricavare:

$$\gamma^2 v^2 m_e^2 = \frac{h^2}{c^2}(f^2 + f'^2 - 2ff'\cos(\alpha)) \tag{6}$$

dalla equazione 3 (equivalente alla conservazione dell'energia) si può ottenere:

$$\gamma - 1 = \frac{h}{m_e c^2}(f - f') \tag{7}$$

Spiegazione con conservazione enermoto

L'equazione 6 si può riscrivere come:

$$\gamma^2 v^2 = \frac{h^2}{c^2 m_e^2}(f^2 + f'^2 - 2ff'\cos(\alpha)) \tag{8}$$

l'equazione 7 può diventare, isolando γ ed elevando al quadrato:

$$\gamma^2 = \frac{h^2}{m_e^2 c^4}\left(f - f'\right)^2 + 1 + \frac{2h}{m_e c^2}\left(f - f'\right) \tag{9}$$

Spiegazione con conservazione enermoto

Utilizzando l'identità $\gamma^2 v^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$ con le equazioni 8 e 9 si ottiene:

$$\frac{h^2}{c^2 m_e^2}(f^2 + f'^2 - 2ff'\cos(\alpha)) = \frac{h^2}{m_e^2 c^2}\left(f - f'\right)^2 + \frac{2h}{m_e}\left(f - f'\right) \qquad (10)$$

dalla 10 si può ricavare:

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos(\alpha)) \qquad (11)$$

Spiegazione con conservazione enermoto

Ricordando che $\lambda = \frac{c}{f}$ e $\lambda' = \frac{c}{f'}$ dalla 11 si ottiene la relazione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\alpha)) \tag{12}$$

L'equazione 12 è in perfetto accordo con i risultati sperimentali. L'effetto Compton con la sua spiegazione mostrano che i fotoni interagiscono con le altre particelle evidenziandone una natura corpuscolare oltre che ondulatoria (come previsto dalla teoria classica delle onde elettro-magnetiche).

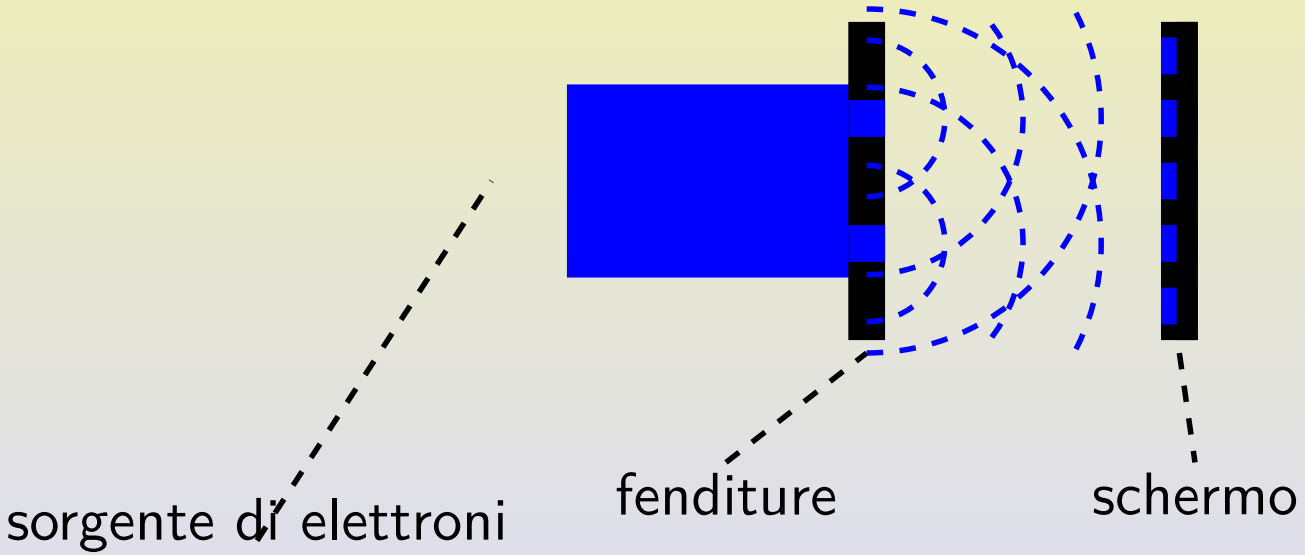
Spiegazione con conservazione enermoto

Dalla 12 si può ricavare:

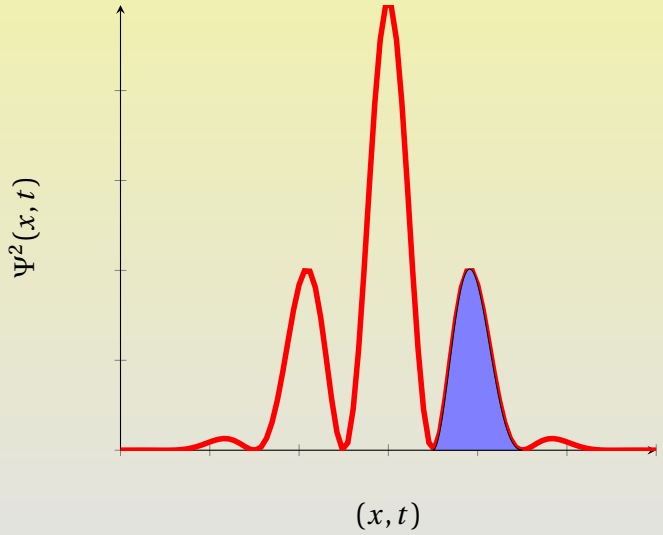
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\alpha)) \rightarrow \lambda' \geq \lambda \tag{13}$$

L'ultima disequazione mostra che il fotone deflesso ha una lunghezza d'onda più elevata rispetto al fotone incidente e ciò è dovuto al fatto che parte dell'energia del fotone incidente è stata acquisita dall'elettrone. L'energia del fotone deflesso dunque è minore rispetto all'energia del fotone incidente.

Il comportamento del corpo nero, l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton sono spiegabili attribuendo caratteristiche corpuscolari alle onde elettro-magnetiche. Anche le particelle presentano caratteristiche ondulatorie. Se si effettua un esperimento alla Young con un fascio di elettroni si ottiene una distribuzione degli elettroni che rispecchia le figure di interferenza ottenute con le onde elettromagnetiche.



La meccanica quantistica è una descrizione probabilistica della realtà per la quale la posizione di una particella nello spazio e nel tempo è descritta da una funzione d'onda $\Psi(x,t)$ il cui quadrato è la densità di probabilità della particella di trovarsi in una data posizione in un certo istante di tempo.



L'area sotto la $\Psi^2(x,t)$ rappresenta la probabilità di trovare la particella in un certo volume spaziale in un certo intervallo di tempo.

Dal paradigma descrittivo della realtà della meccanica quantistica:

- si può definire un modello atomico coerente con la quantizzazione dei livelli energetici e del momento angolare

Dal paradigma descrittivo della realtà della meccanica quantistica:

- si può definire un modello atomico coerente con la quantizzazione dei livelli energetici e del momento angolare
- si ricava lo spin come caratteristica particellare

Dal paradigma descrittivo della realtà della meccanica quantistica:

- si può definire un modello atomico coerente con la quantizzazione dei livelli energetici e del momento angolare
- si ricava lo spin come caratteristica particellare
- si dimostra il principio di esclusione di Pauli

Dal paradigma descrittivo della realtà della meccanica quantistica:

- si può definire un modello atomico coerente con la quantizzazione dei livelli energetici e del momento angolare
- si ricava lo spin come caratteristica particellare
- si dimostra il principio di esclusione di Pauli
- si dimostra che quantità di moto e posizione di una particella non possono essere misurate contemporaneamente, se si conosce in modo molto preciso una delle due si perdono informazioni sull'altra (principio di indeterminazione di Heisenberg)

- si teorizza che l'energia di una particella sia costante su lunghi intervalli di tempo ma che possa non esserlo per tempi relativamente brevi

ATTENZIONE: le incertezze nelle misure quantistiche non dipendono dalle modalità tecniche di effettuazione della misura e non sono teorizzate a priori ma sono una conseguenza della particolare descrizione probabilistica della realtà.

- si teorizza che l'energia di una particella sia costante su lunghi intervalli di tempo ma che possa non esserlo per tempi relativamente brevi
- si spiega come sia possibile per alcune particelle superare barriere energetiche classicamente non superabili (effetto tunnel).

ATTENZIONE: le incertezze nelle misure quantistiche non dipendono dalle modalità tecniche di effettuazione della misura e non sono teorizzate a priori ma sono una conseguenza della particolare descrizione probabilistica della realtà.

Simboli di derivazione:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = D(f(t))$$

Derivata di una funzione vettoriale:

$$\vec{f}'(t) = \frac{d\vec{f}}{dt} = D(\vec{f}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{df_x}{dt} \\ \frac{df_y}{dt} \\ \frac{df_z}{dt} \end{pmatrix}$$

Cinematica:

$$\vec{S}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{S}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(0)t + x(0)$$

$$v(t) = x'(t) = at + v(0)$$

$$a(t) = x''(t) = a$$

Moto circolare uniforme: velocità tangenziale e accelerazione centripeta (1)

$$\vec{S}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{S}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Moto circolare uniforme: velocità tangenziale e accelerazione centripeta (2)

$$\vec{S}(t)\cdot\vec{v}(t)=0\rightarrow\begin{pmatrix} r\cos(\omega t)\\ r\sin(\omega t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t)\\ r\omega\cos(\omega t)\end{pmatrix}=0\rightarrow\vec{S}(t)\perp\vec{v}(t)$$

$$\vec{a}(t)=-\omega^2\vec{S}(t)\rightarrow\vec{a}(t)\parallel\vec{S}(t)$$

$$v=\left|\vec{v}(t)\right|=\sqrt{(-r\omega\sin(\omega t))^2+(r\omega\cos(\omega t))^2}=r\omega$$

$$a=\left|\vec{a}(t)\right|=\sqrt{(-r\omega^2\cos(\omega t))^2+(-r\omega^2\sin(\omega t))^2}=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

Alternatore

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$V = -\frac{d(SB\cos(\omega t))}{dt} = -SB\frac{d(\cos(\omega t))}{dt} =$$

$$= SB\omega\sin(\omega t)$$

Equazioni differenziali omogenee del primo ordine a coefficienti costanti

$$y = f(t)$$

$$y' = ky \rightarrow \frac{dy}{dt} = ky \rightarrow (\text{se} y \neq 0)\ \frac{dy}{y} = k\,dt \rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt \rightarrow \ln(|y|) + C_1 = kt + C_2 \rightarrow$$

$$\ln(|y|) = kt + C_3 \rightarrow |y| = e^{kt+C_3} \rightarrow |y| = e^{C_3} e^{kt} \rightarrow$$

$$y = Ce^{kt}$$

Equazioni differenziali non omogenee del primo ordine a coefficienti costanti

$$y = f(t)$$

$$y' = ky + h \rightarrow y = Ce^{kt} - \frac{h}{k}$$

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y = f(t)$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\text{se } b^2 - 4ac > 0 \rightarrow y = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}t} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}t}$$

$$\text{se } b^2 - 4ac = 0 \rightarrow y = e^{\frac{-b}{2a}t}(C_1 + C_2 t)$$

$$\text{se } b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$$

$$y = e^{\frac{-b}{2a}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}t\right)\right)$$

Oscillatore armonico

$$F_e = ma \rightarrow -kx = mx''$$

se $x(0) = A$ e $x'(0) = 0$:

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$v = x' = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$a = x'' = -A\frac{k}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Pendolo

$$F = ma \rightarrow -mg\sin(\gamma) = mL\alpha \rightarrow -g\sin(\gamma) = L\gamma''$$

se $\gamma \approx 0 \rightarrow -g\gamma = L\gamma''$ e $\gamma'(0) = 0$ e $\gamma(0) = A$:

$$\gamma = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\omega = \gamma' = -A\sqrt{\frac{g}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

$$\alpha = \gamma'' = -A\frac{g}{L}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

Circuiti RC, fase di carica, $Q(0) = 0$

$$\mathscr{E} - I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0 \rightarrow \mathscr{E} - Q'(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$Q(t) = \mathscr{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$I(t) = Q'(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuiti RC, fase di scarica

$$-I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0 \rightarrow -Q'(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = Q'(t) = -\frac{Q(0)}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuiti RL, con generatore di tensione continua, $I(0) = 0$

$$\mathscr{E} - I(t)R - LI'(t) = 0$$

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

Circuiti RL, senza generatore di tensione continua

$$-I(t)R - LI'(t) = 0$$

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Circuiti LC, con $Q(0) = 0$

$$-LI'(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \rightarrow -LQ''(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$Q(t) = I(0)\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$I(t) = Q'(t) = I(0)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Potenza media dissipata su una resistenza in tensione alternata

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2(t)}{R}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_{max}^2 \sin^2(\omega t)}{R}dt =$$

$$\frac{V_{max}^2}{TR}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{V_{max}^2}{TR}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt =$$

$$\frac{V_{max}^2}{2TR}\int_0^T 1-\cos(2\omega t)dt = \frac{V_{max}^2}{2TR}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T =$$

$$= \frac{V_{max}^2}{2TR}\left[T - \frac{\sin(4\pi)}{2\omega}\right] = \frac{V_{max}^2}{2R}$$

Lavoro in trasformazioni isoterme

$$L_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV =$$

$$= nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT\,[\ln(V)]_A^B =$$

$$= nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Legge di Stefan-Boltzmann dalla curva di Wien (a meno di costanti moltiplicative) (1)

$$\int x^3 e^{-\frac{x}{T}} dx = e^{-\frac{x}{T}} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$$

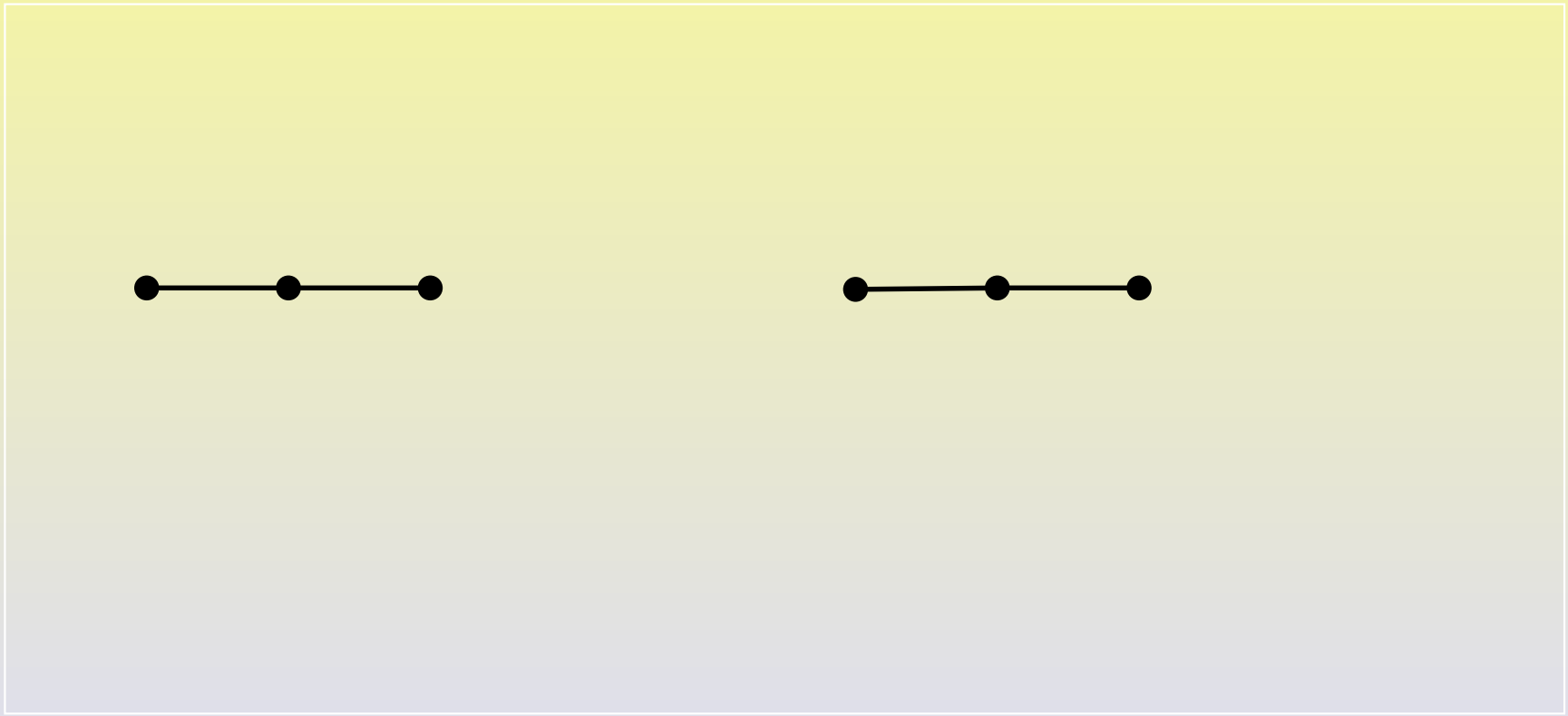
$$x^3 e^{-\frac{x}{T}} = e^{-\frac{x}{T}} \left[-\frac{a}{T}x^3 + \left(3a - \frac{b}{T}\right)x^2 + \left(2b - \frac{c}{T}\right)x + c - \frac{d}{T}\right]$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{T} = 1 \\ 3a - \frac{b}{T} = 0 \\ 2b - \frac{c}{T} = 0 \\ c - \frac{d}{T} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -T \\ b = -3T^2 \\ c = -6T^3 \\ d = -6T^4 \end{cases}$$

Legge di Stefan-Boltzmann dalla curva di Wien (a meno di costanti moltiplicative) (2)

$$\int x^3 e^{-\frac{x}{T}} dx = e^{-\frac{x}{T}} \left(-T x^3 - 3T^2 x^2 - 6T^3 x - 6T^4\right)$$

$$I_{tot} = \int_0^{+\infty} \frac{dI}{df} df = \int_0^{+\infty} f^3 e^{-\frac{f}{T}} df =$$

$$= \left[e^{-\frac{f}{T}} \left(-T f^3 - 3T^2 f^2 - 6T^3 f - 6T^4\right) \right]_0^{+\infty} = 6T^4$$

Condizioni iniziali molto simili non garantiscono comportamenti dello stesso tipo anche in sistemi fisici molto
semplici. Qui sono simulati due pendoli doppi con condizioni iniziali vicine.